
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

CARLO CATTANEO

Sulla seconda proprietà caratteristica dei moti rigidi

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
2, Vol. 1 (1939), n.5, p. 479–480.*

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_5_479_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1939.

Sulla seconda proprietà caratteristica dei moti rigidi.

Nota di CARLO CATTANEO (a Roma).

Sunto. - Per la dimostrazione si sfrutta l'invariabilità, durante il moto, degli angoli (retti) di una terna solidale.

Sia Σ un sistema di punti in moto rigido; denotiamo con P il generico di questi punti e con Ω uno di essi, scelto a piacere. Qualunque sia il moto rigido di Σ , esiste un vettore ω , suscettibile di variare nel tempo, ma indipendente da P e da Ω , tale che a ogni istante risulta:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_\Omega + \omega \wedge \Omega P;$$

(il significato dei simboli è evidente).

Questo teorema è uno degli scogli, forse il più arduo, che il principiante incontra nello studio dei moti rigidi e non è forse inutile esporne una dimostrazione che, almeno dal punto di vista formale, mi sembra facilmente accessibile e che non mi risulta adoperata nei testi di meccanica.

Sia $\Omega\xi\eta\zeta$ una terna cartesiana ortogonale solidale a Σ : indichiamo con \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} i suoi versori fondamentali; sia inoltre O un punto fisso. Dall'identità

$$(1) \quad OP = O\Omega + \xi\mathbf{i} + \eta\mathbf{j} + \zeta\mathbf{k}$$

per derivazione rispetto al tempo si ottiene intanto:

$$(2) \quad \mathbf{v}_P = \mathbf{v}_\Omega + \xi \frac{d\mathbf{i}}{dt} + \eta \frac{d\mathbf{j}}{dt} + \zeta \frac{d\mathbf{k}}{dt}.$$

Ricordando che il derivato di un vettore di lunghezza costante è ortogonale al vettore medesimo, i derivati dei versori fondamentali si possono scrivere, a ogni istante, nella forma seguente:

$$(3) \quad \frac{d\mathbf{i}}{dt} = a\mathbf{j} + b\mathbf{k}, \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = c\mathbf{k} + d\mathbf{i}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = e\mathbf{i} + f\mathbf{j}.$$

i coefficienti scalari, indipendenti da P e da Ω , potendo variare nel tempo.

Scelto un istante (qualunque) t , consideriamo il moto rigido di Σ nell'intervallo di tempo t , $t + dt$. A norma delle (3) i tre versori fondamentali, coincidenti all'istante t con \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} , all'istante $t + dt$ assumono (a meno di infinitesimi d'ordine superiore al primo) le determinazioni:

$$\mathbf{i} + (a\mathbf{j} + b\mathbf{k})dt, \quad \mathbf{j} + (c\mathbf{k} + d\mathbf{i})dt, \quad \mathbf{k} + (e\mathbf{i} + f\mathbf{j})dt.$$

Per la rigidità del moto questi tre vettori devono essere mutuamente ortogonali, come lo sono i vettori \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} , ciò che si esprime annullando i loro prodotti scalari a due a due. Eseguite le operazioni, tenendo presenti le identità

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = 1, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{k} \times \mathbf{i} = 0,$$

e tenendo conto dei soli termini d'ordine minimo in dt (cioè del primo ordine), risulta

$$(4) \quad d = -a, \quad e = -b, \quad f = -c.$$

Fatte le debite sostituzioni di (4) in (3) e, successivamente, di (3) in (2) e posto, per adottare le notazioni abituali,

$$c = p, \quad -b = q, \quad a = r,$$

si ottiene in definitiva

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + (q\zeta - r\eta)\mathbf{i} + (r\xi - p\zeta)\mathbf{j} + (p\eta - q\xi)\mathbf{k}.$$

Nella somma degli ultimi tre termini si riconosce agevolmente il prodotto vettoriale del vettore

$$\boldsymbol{\omega} \equiv p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k},$$

indipendente da P e da Ω , per il vettore

$$\Omega P \equiv \xi\mathbf{i} + \eta\mathbf{j} + \zeta\mathbf{k}.$$

Naturalmente da (3) e da (4) si ricavano immediatamente anche le formule di POISSON.