

---

# BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

ANTONIO SIGNORINI

## Cenni qualitativi di balistica esterna

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2,*  
Vol. 1 (1939), n.5, p. 458-473.

Unione Matematica Italiana

<[http:  
//www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_1939\\_2\\_1\\_5\\_458\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_5_458_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

*SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

# SEZIONE STORICO-DIDATTICA

## PICCOLE NOTE

### Cenni qualitativi di Balistica esterna.

Nota di ANTONIO SIGNORINI (a Roma).

**Sunto.** - *Vengono ricavate, con qualche modesto complemento, le proprietà classiche delle traiettorie atmosferiche, mediante un sistematico confronto del problema principale della Balistica esterna col semplice problema del moto dei gravi nel vuoto. In fine è indicata un'estensione del teorema di OLLERO.*

**1. Il problema principale della Balistica esterna.** — Il problema principale della Balistica esterna è quello del moto di un punto materiale pesante  $P$  in un mezzo resistente, sotto qualche restrizione per la legge della resistenza di mezzo  $R$ .

Precisamente, accennando con  $v$  la velocità di  $P$ , nel problema principale della Balistica esterna, oltre identificare l'orientamento di  $R$  con quello di  $-v$ , si assume

$$R = c' \mu f(v);$$

intendendo per  $c'$  un coefficiente positivo dipendente dalla forma del proietto e proporzionale al quadrato del calibro, per  $\mu$  la densità del mezzo, per  $f(v)$  una funzione sperimentale nota della sola  $v$  (la stessa per ogni tipo di proietto, nulla per  $v = 0$ , sempre positiva per  $v > 0$ ). Insieme a  $f(v)$  anche la funzione

$$\frac{f(v)}{v}$$

va supposta (finita per  $v = 0$  e) sempre crescente al crescere di  $v$ . Per quanto riguarda la  $\mu$ , nell'impostare il problema nella sua forma più generale non è lecito trattarla sistematicamente come una costante, non fosse altro perchè ormai numerosi sono i tipi di artiglierie atti a realizzare tiri con differenze di quota di più chilometri: attribuito all'asse  $y$ , una volta per tutte, l'orientamento

della verticale discendente, si deve pensare la *densità del mezzo* come una *funzione sperimentale nota*  $\mu(y)$  della quota del proietto, lentamente ma costantemente *crescente* con  $y$ . La riduzione della  $\mu(y)$  a una costante può convenire solo in casi speciali (tiro teso, ecc.).

In definitiva l'equazione fondamentale della Meccanica del punto, accennando con

$$\mathbf{p} = m\mathbf{g}$$

il peso del proietto e ponendo

$$c = \frac{c'}{m},$$

si presenta nella forma

$$(1) \quad \mathbf{a} = \mathbf{g} - c\mu(y) \cdot \frac{f(v)}{v} \cdot \mathbf{v}.$$

Alla condizione già imposta all'orientamento dell'asse  $y$ , aggiungiamo quella che l'origine della terna cartesiana ortogonale di riferimento  $xyz$  coincida con l'*origine della traiettoria*, cioè con la posizione  $P_0$  occupata da  $P$  all'istante  $t=0$  in cui cessa ogni diretta influenza delle modalità di lancio. Naturalmente la velocità di  $P$  al medesimo istante — *velocità iniziale del proietto* — è appresso indicata con

$$\mathbf{v}_0 = (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0).$$

La (1) può sostituirsi con le tre equazioni differenziali scalari del 2° ordine

$$(1') \quad \left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = -c\mu(y) \cdot \frac{f(v)}{v} \cdot \dot{x} \\ \ddot{y} = g - c\mu(y) \cdot \frac{f(v)}{v} \cdot \dot{y} \\ \ddot{z} = -c\mu(y) \cdot \frac{f(v)}{v} \cdot \dot{z} \end{array} \right. \quad (v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}).$$

La 3ª implica

$$-c\mu(y) \cdot \frac{f(v)}{v} \cdot \dot{z}^2 = \ddot{z} \dot{z} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{z}^2}{dt},$$

nonchè

$$\frac{d\dot{z}^2}{dt} \leq 0.$$

Se dunque è  $\dot{z}_0 = 0$  (cioè, se  $z$  è normale a  $\mathbf{v}_0$ ) a ogni istante dovrà essere  $\dot{z} = 0$  e la traiettoria di  $P$  interamente appartenerà al piano  $xy$ . Si conclude (1) che:

(1) Queste conclusioni sono pure suggerite da ovvie considerazioni di simmetria.

a) se  $v_0$  ha la direzione della verticale il moto di  $P$  è necessariamente rettilineo, sulla verticale per  $P_0$ ;

b) se  $v_0$  non è verticale la traiettoria di  $P$  interamente appartiene al piano individuato da  $(P_0, v_0)$  e dalla verticale per  $P_0$ , piano di tiro.

Comunque basta supporre l'asse  $z$  normale a  $v_0$  perchè il problema principale della Balistica esterna resti ricondotto all'integrazione del sistema

$$(2) \quad \begin{cases} \ddot{x} = -c\mu(y) \cdot \frac{f(v)}{v} \cdot \dot{x} \\ \ddot{y} = g - c\mu(y) \cdot \frac{f(v)}{v} \cdot \dot{y} \end{cases} \quad (v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2})$$

con le condizioni iniziali, per  $t=0$ ,

$$(2') \quad \begin{cases} x = y = 0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \geq 0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0. \end{cases}$$

Nel seguito, insieme alla condizione or ora specificata per l'asse  $z$  s'intende aggiunta pur quella che l'asse positivo  $x$  sia concorde a  $v_0$  (se  $v_0$  non è verticale) e s'indica con  $\varphi$  l'angolo di proiezione, cioè l'angolo tra  $-\frac{\pi}{2}$  e  $\frac{\pi}{2}$  — contato positivamente verso l'alto — che  $v_0$  forma col prescelto asse positivo  $x$ : ciò che equivale a porre

$$(2'') \quad \dot{x}_0 = v_0 \cos \varphi \geq 0, \quad \dot{y}_0 = -v_0 \sin \varphi.$$

Anzi intenderemo sempre  $\varphi$  positivo, cioè

$$(2''') \quad \dot{y}_0 < 0;$$

non solo perchè quest'ipotesi corrisponde alle ordinarie condizioni di tiro, ma anche perchè (come sarà facile convincersi) il caso  $\varphi > 0$  è il più comprensivo.

Sistematicamente porremo a raffronto il problema principale della Balistica esterna col semplice problema del moto dei gravi nel vuoto; onde talvolta riuscirà espressivo chiamare *traiettoria atmosferica* la traiettoria dell'attuale nostro  $P$ , ecc.

**2. Vertice della traiettoria, conseguenze immediate del teorema delle forze vive.** — A partire dall'istante iniziale, finchè la  $\dot{y}$  non si sia annullata, per effetto di (2)<sub>2</sub> e (2''') deve essere, non solo  $\ddot{y} \geq g$  e

$$(3) \quad \dot{y} - \dot{y}_0 > gt,$$

ma anche (cfr. (2'')<sub>2</sub>)

$$t < \frac{v_0 \sin \varphi}{g}.$$

Esiste dunque un istante <sup>(2)</sup>

$$(4) \quad t = T_v < \frac{v_0 \sin \varphi}{g}$$

in corrispondenza al quale la  $\dot{y}$  si annulla, per poi divenire e indefinitamente restare positiva [perchè la (2)<sub>2</sub> a  $\dot{y} = 0$  fa corrispondere  $\dot{y} = g > 0$ ]. La posizione  $V$  occupata da  $P$  all'istante  $t = T_v$  (in quanto corrisponde al minimo assoluto della nostra  $y$ ) è il *vertice* della traiettoria; mentre si chiama *ramo ascendente* l'arco di traiettoria  $P_0 V$ , *ramo discendente* tutta la linea percorsa da  $P$  dopo l'istante  $t = T_v$ . *altezza del tiro* il valore assoluto  $A$  della  $y$  in  $V$ .

Posto

$$\Pi_1 = -gy.$$

cioè rappresentando con  $\Pi_1$  l'energia potenziale di gravità riferita all'unità di massa del proietto, da (1) [moltiplicando scalarmente per  $v$ ] ovvero dal teorema delle forze vive si trae, almeno per  $t \neq T_v$ ,

$$(5) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} + \Pi_1 \right) < 0.$$

Rimane dunque stabilito che

$$\mathcal{E}_1 = \frac{v^2}{2} + \Pi_1$$

al crescere di  $t$  costantemente decresce, con l'immediata, ovvia conseguenza che *lungo il ramo ascendente la  $v$  va costantemente diminuendo* (perchè ivi  $\Pi_1$  va costantemente crescendo).

Sia  $P''$  un punto del ramo discendente (distinto da  $V$  e) non situato al disotto dell'*orizzonte* di  $P_0$  (asse  $x$ ) e  $P'$  il punto del ramo ascendente che ha la stessa quota verticale (cioè la stessa  $y$ ) di  $P''$ . Il confronto dei valori di  $\mathcal{E}_1$  in  $P''$  e  $P'$  fornisce

$$(6) \quad v_{P''} < v_{P'}.$$

In completa analogia alla (5), da (2)<sub>2</sub> (moltiplicando per  $\dot{y}$ ) si ricava, per  $t \neq T_v$ ,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{y}^2}{2} + \Pi_1 \right) < 0.$$

Vuol dire che pure

$$Y_1 = \frac{\dot{y}^2}{2} + \Pi_1$$

<sup>(2)</sup> Nel vuoto  $P$  raggiungerebbe il vertice della sua traiettoria parabolica proprio all'istante  $t = \frac{v_0 \sin \varphi}{g}$ , perchè la (3) si ridurrebbe a  $y - \dot{y}_0 = gt$ .

al crescere di  $t$  costantemente decresce e in particolare che *lungo il ramo ascendente anche  $|\dot{y}|$  va costantemente diminuendo* (a partire dal valore  $v_0 \sin \varphi$ ). Confrontando i valori di  $Y_1$  in  $V$  e in  $P_0$  si trova

$$(7) \quad A < \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{2g}$$

come è naturale per la *traiettoria atmosferica l'altezza del tiro risulta sempre minore di quella che si avrebbe nel vuoto* (a parità di  $v_0$ ). Di più, confrontando i valori di  $Y_1$  in  $P''$  e  $P'$ , si trova

$$(8) \quad \dot{y}_{P''} < |\dot{y}_{P'}|.$$

Indichiamo con  $T'$  il tempo di ascesa da  $P'$  fino al vertice  $V$  e con  $T''$  il tempo di discesa da  $V$  fino a  $P''$ . Integrando lungo la traiettoria

$$dt = \frac{dy}{\dot{y}},$$

a  $T'$  e  $T''$  rispettivamente possono darsi le espressioni

$$T' = \int_{P'}^V \frac{dy}{\dot{y}} = \int_V^{P''} \frac{dy}{|\dot{y}|}, \quad T'' = \int_V^{P''} \frac{dy}{\dot{y}}.$$

D'altra parte la (8) può riferirsi a ogni coppia di punti d'ugual quota verticale appartenenti l'uno all'arco di traiettoria  $P'V$  e l'altro all'arco  $VP''$ . L'uguaglianza  $y_{P'} = y_{P''}$  permette quindi di concludere

$$(9) \quad T' < T''.$$

**3. Punto di caduta, durata della traiettoria.** — In base a (2)<sub>2</sub>, integrando  $\ddot{y}dt$  lungo la traiettoria da  $P_0$  a  $P''$  e accennando con  $\dot{y}_{P''}$  e  $t_{P''}$  i valori di  $t$  all'istante in cui  $P$  raggiunge la posizione  $P''$ , si ottiene

$$(10) \quad \dot{y}_{P''} - \dot{y}_0 = gt_{P''} - c \int_{P_0}^{P''} \mu(y) \frac{f(v)}{v} dy - c \int_{P'}^{P''} \mu(y) \frac{f(v)}{v} dy.$$

Evidentemente (per  $P' \neq P_0$ ) è

$$- \int_{P_0}^{P''} \mu(y) \frac{f(v)}{v} dy = \int_{P'}^{P_0} \mu(y) \frac{f(v)}{v} dy > 0.$$

Ma è pure (anche per  $P' = P_0$ )

$$0 < - \int_{P'}^{P''} \mu(y) \frac{f(v)}{v} dy = \int_V^{P'} \mu(y) \frac{f(v)}{v} dy - \int_V^{P''} \mu(y) \frac{f(v)}{v} dy:$$

invero (cfr. (6) e n. 1) a parità di  $y$

$$\mu(y) \frac{f(v)}{v}$$

è maggiore sul ramo ascendente che non sul ramo discendente; mentre s'intende sempre  $y_{P'} = y_{P''}$ .

La (10) implica dunque

$$(11) \quad gt_{P''} < 2v_0 \sin \varphi,$$

con la conclusione che per un certo valore finito di  $t$  il ramo discendente taglia l'orizzonte di  $P_0$ , in un certo punto  $B_*$ . A

$$X = |P_0 B_*|$$

si dà il nome di *gittata*, a  $B_*$  quello di *punto di caduta* e si chiama *durata della traiettoria* il tempo  $T_*$  impiegato da  $P$  a percorrere l'arco di traiettoria sotteso dalla gittata.

Da (11) risulta (3)

$$(12) \quad T_* < \frac{2v_0 \sin \varphi}{g};$$

per la traiettoria atmosferica la durata è sempre minore di quella che si avrebbe nel vuoto (a parità di  $v_0$ ).

Converrà anche procurarsi dei semplici limiti inferiori di  $T_v$  e  $T_*$ . Accennando con

$$\mu_0 = \mu(0)$$

il valore della densità atmosferica sull'orizzonte di  $P_0$ , per  $y < 0$  simultaneamente si ha (4)

$$(13) \quad \mu(y) < \mu_0, \quad v < v_0, \quad \frac{f(v)}{v} < \frac{f(v_0)}{v_0}.$$

Poniamo

$$(14) \quad \varphi_0 = \frac{c\mu_0 f(v_0)}{g} = \left[ \frac{R}{p} \right]_{t=0}$$

e

$$(14') \quad \frac{1}{\tau_0} = \frac{\varphi_0 g}{v_0} = c\mu_0 \frac{f(v_0)}{v_0}$$

In conseguenza di (2)<sub>2</sub> e (13), dentro il ramo ascendente ( $y < 0$ ,  $\dot{y} < 0$ ) è sempre

$$\ddot{y} < g - \frac{\dot{y}}{\tau_0}$$

(3) Causa la (9) non si può certo ricavare la (12) dal solo fatto che è  $T_v < \frac{v_0 \sin \varphi}{g}$ .

(4) Cfr. ancora n.° 1.

e quindi

$$\frac{d}{dt} \left( y e^{\tau_0 t} \right) < g e^{\tau_0 t}.$$

Integrando rispetto al tempo (da  $t=0$  a  $t=T_v$ ) si ottiene

$$v_0 \sin \varphi < g \tau_0 \left( e^{\frac{T_v}{\tau_0}} - 1 \right),$$

ovvero [cfr. (14')] ]

$$(15) \quad e^{\frac{T_v}{\tau_0}} > 1 + \tau_0 \sin \varphi :$$

ciò che implica (5)

$$(15') \quad T_v > \frac{v_0 \sin \varphi}{g(1 + \tau_0 \sin \varphi)}.$$

Risultando da (9)

$$(15'') \quad T_* > 2T_v,$$

rimane pure stabilita la disuguaglianza

$$T_* > \frac{2v_0 \sin \varphi}{g(1 + \tau_0 \sin \varphi)}.$$

4. **Un limite superiore per  $v$ .** — Dopo l'istante iniziale, finchè  $P$  non abbia sorpassato il punto di caduta, è certo  $v < v_0$ ; in particolare, indicando con  $v_*$  la *velocità di caduta* (velocità in  $B_*$ ) è

$$v_* < v_0.$$

L'equazione

$$g - c\mu_0 f(v) = 0$$

ammette (6) una ed una sola radice positiva  $w$  e risulta

$$(16) \quad g - c\mu_0 f(v) \leq 0$$

quando e solo quando  $v$  non è inferiore a  $w$ .

Sia  $V_*$  la più grande delle due costanti  $v_*$  e  $w$  (se pure esse non sono uguali). Dimostreremo che — *in netto contrasto con quanto si verificherebbe nel vuoto* — per ogni valore finito di  $t$  superiore a  $T_*$  è  $v < V_*$ .

Per  $t > T_*$ , cioè per  $y > 0$ , è  $\mu(y) > \mu(0) = \mu_0$ . In conseguenza, ove si ammetta che simultaneamente sia  $v \geq w > 0$ , proiettando

(5) Per ogni  $u > 0$  è  $\log(1+u) > \frac{u}{1+u}$ . Invero, ponendo

$$f(u) = (1+u) \log(1+u) - u,$$

subito si riconosce che (insieme a  $f(0) = 0$ ) per ogni  $u > 0$  si ha

$$f'(u) = \log(1+u) > 0.$$

(6) Cfr. ancora n.° 1.

la (1) sulla tangente alla traiettoria orientata nel verso di  $v$ , subito si trova

$$\frac{dv}{dt} < g - c\mu_0 f(v),$$

nonchè [cfr. (16)]

$$\frac{dv}{dt} < 0.$$

Vuol dire che per  $t > T_*$  e  $v \geq w$  il moto è certo ritardato. Ne segue, in conformità dell'asserto, che al di là del punto di caduta: 1°) per  $v_* < w$  il moto può essere accelerato, ma  $v$  non può mai raggiungere il valore  $w = V_*$ ; 2°) per  $w \leq v_* = V_*$  il moto deve essere ritardato almeno fin quando  $v$  non si sia ridotta  $< w$  e se pure viene a verificarsi questa eventualità resta escluso che successivamente  $v$  torni a prendere il valore  $w$ .

Indicando con  $v_2$  la più grande delle due costanti  $V_*$  e  $v_0$ , rimane pure stabilito che per  $t > 0$  è sempre

$$(17) \quad v < v_2.$$

### 5. Limiti inferiori della gittata e della velocità al vertice. —

D'ora innanzi escluderemo il tiro verticale ( $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ) cioè supporremo

$$\dot{x}_0 = v_0 \cos \varphi > 0.$$

Fin quando la  $\dot{x}$  si mantenga positiva e  $t > 0$  non superi  $T_*$ , da (2), si può trarre, non solo

$$\ddot{x} > -\frac{\dot{x}}{\tau_0},$$

ma anche

$$\frac{d}{dt} \left( \dot{x} e^{\frac{t}{\tau_0}} \right) > 0$$

e

$$(18) \quad \dot{x} > \dot{x}_0 e^{-\frac{t}{\tau_0}}.$$

Essendo il suo secondo membro positivo per ogni valore finito di  $t$ , la (18) rimane stabilita per ogni  $t > 0$  non superiore a  $T_*$ : onde  $\dot{x}$ , almeno (7) nell'intervallo  $(0, T_*)$  [oltre che positiva] deve essere sempre decrescente.

(7) La (2)<sub>1</sub> per ogni  $t$  implica  $\frac{d\dot{x}^2}{dt} \leq 0$  e quindi senz'altro garantisce che la  $\dot{x}$  fin quando è positiva va sempre decrescendo; mentre tale osservazione da sola non basta a escludere che a partire da un certo istante la  $\dot{x}$  sia sempre nulla.

Accennando con  $v_v$  la *velocità al vertice* ( $t = T_v$ ) la (18) implica

$$v_v > \dot{x}_0 e^{-\frac{T_v}{\tau_0}},$$

nonchè [cfr. (14') e (4)]

$$(19) \quad v_v > v_0 \cos \varphi \cdot e^{-\rho_0 \sin \varphi}.$$

Sempre da (18) (integrando rispetto al tempo a partire da  $t = 0$ ) almeno per  $0 < t \leq T_*$  si può ricavare

$$x > \tau_0 \dot{x}_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_0}}\right).$$

In particolare si ottiene così per la gittata  $X$  la disuguaglianza

$$(20) \quad X > \tau_0 \dot{x}_0 \left(1 - e^{-\frac{T_*}{\tau_0}}\right).$$

Indichiamo con

$$X_v = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g} = 2\dot{x}_0 \cdot \frac{v_0 \sin \varphi}{g}$$

la gittata che a parità di  $v_0$  si avrebbe nel vuoto. Essendo [cfr. (15'') e (15)]

$$e^{-\frac{T_*}{\tau_0}} < \left[e^{-\frac{T_v}{\tau_0}}\right]^2 < \frac{1}{(1 + \rho_0 \sin \varphi)^2},$$

nonchè (8)

$$1 - \frac{1}{(1 + \rho_0 \sin \varphi)^2} = 2\rho_0 \sin \varphi \frac{1 + \frac{1}{2}\rho_0 \sin \varphi}{(1 + \rho_0 \sin \varphi)^2} > \frac{2\rho_0 \sin \varphi}{1 + 2\rho_0 \sin \varphi},$$

la (20) implica

$$X > \frac{X_v}{1 + 2\rho_0 \sin \varphi}.$$

**6. Un limite inferiore per  $v$ .** — Sia  $\mu_2$  un limite superiore di  $\mu(y)$  nell'intero campo del moto e poniamo (9)

$$\frac{1}{\tau_2} = c\mu_2 \frac{f(v_2)}{v_2}.$$

Poniamo anche

$$t' = t - T_v.$$

Per  $t' > 0$  (almeno fin quando la  $\dot{x}$  si mantiene positiva) da (2),

(8) Per ogni  $u > 0$  è  $\frac{1 + \frac{1}{2}u}{(1 + u)^2} > \frac{1}{1 + 2u}$ .

(9) Cfr. (14') e n.° 4, in fine.

si può trarre <sup>(10)</sup>

$$(21) \quad \dot{x} > v_v e^{-\frac{t'}{\tau_2}};$$

in particolare, che per ogni  $t$  la  $\dot{x}$  è positiva e decrescente.

Sempre per  $t' > 0$  ( $\dot{y} > 0$ ) la (2)<sub>2</sub> implica

$$\ddot{y} > g - \frac{\dot{y}}{\tau_2}$$

e quindi

$$\frac{d}{dt'} \left( \dot{y} e^{\frac{t'}{\tau_2}} \right) > g e^{\frac{t'}{\tau_2}},$$

nonchè

$$(22) \quad \dot{y} > g\tau_2 \left( 1 - e^{-\frac{t'}{\tau_2}} \right).$$

Poniamo

$$e^{-\frac{t'}{\tau_2}} = u,$$

$$P(u) = v_v^2 u^2 + g^2 \tau_2^2 (1 - u)^2$$

e

$$v_1 = \frac{v_0 \cos \varphi e^{-\rho_0 \sin \varphi}}{\sqrt{1 + \frac{v_0^2 \cos^2 \varphi}{g^2 \tau_2^2} e^{-2\rho_0 \sin \varphi}}}.$$

In conseguenza di (21) e (22) per ogni  $t' > 0$  risulta

$$(23) \quad v^2 > \mathfrak{F}(u)$$

con

$$0 < u < 1.$$

Essendo per ogni  $u$

$$\frac{1}{2} \mathfrak{F}'(u) = (v_v^2 + g^2 \tau_2^2) u - g^2 \tau_2^2, \quad \mathfrak{F}''(u) > 0,$$

il minimo assoluto  $\mathfrak{F}_m$  della  $\mathfrak{F}(u)$  corrisponde a

$$u = \frac{g^2 \tau_2^2}{v_v^2 + g^2 \tau_2^2} < 1$$

ed è

$$\mathfrak{F}_m = \frac{g^2 \tau_2^2 \cdot v_v^2}{v_v^2 + g^2 \tau_2^2}.$$

Si conclude <sup>(11)</sup> che per ogni  $t$  certamente è

$$(24) \quad v > v_1.$$

<sup>(10)</sup> Cfr. n.º precedente, in principio.

<sup>(11)</sup> Cfr. (23) e (19), tenendo pur conto del fatto che per  $t < T_v$  è  $v > v_v$ .

7. **Asintoto verticale delle traiettorie atmosferiche.** — Per  $t' > 0$  da (22) si può ricavare

$$y > g\tau_2 t' - g\tau_2 \left(1 - e^{-\frac{t'}{\tau_2}}\right);$$

in particolare

$$(25) \quad \lim_{t' \rightarrow \infty} y = +\infty.$$

Poniamo [cfr. (7)]

$$\mu_1 = \mu \left( -\frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{2g} \right)$$

e insieme [cfr. (24)]

$$\frac{1}{\tau_1} = c\mu_1 \frac{f(v_1)}{v_1}.$$

Si avrà allora per ogni  $t$

$$c\mu(y) \frac{f(v)}{v} > \frac{1}{\tau_1}$$

e insieme <sup>(12)</sup>

$$\ddot{x} < -\frac{\dot{x}}{\tau_1},$$

cioè

$$\frac{d}{dt} \left( \dot{x} e^{\frac{t}{\tau_1}} \right) < 0;$$

nonchè

$$(26) \quad \dot{x} < \dot{x}_0 e^{-\frac{t}{\tau_1}}$$

e

$$(26') \quad x < \tau_1 \dot{x}_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right).$$

In particolare resta messo in evidenza che al crescere indefinito di  $t$ :

α) la  $\dot{x}$ , sempre decrescendo, tende a zero:

β) la  $x$ , sempre crescendo, tende a un limite non superiore a  $\tau_1 \dot{x}_0$ .

Col concorso di (25) si conclude che ogni traiettoria atmosferica  $l$  ammette un asintoto verticale  $a$ .

La distanza  $x_a$  di  $a$  da  $P_0$  non può superare  $\tau_1 v_0 \cos \varphi$ . Si può aggiungere che al crescere indefinito di  $t$  la tangente in  $P$  ad  $l$  ha proprio per limite  $a$ . Invero sia  $i$  la inclinazione della traiettoria  $P$ : precisamente, l'angolo acuto formato da  $v$  col semiasse positivo  $x$ , preso col segno — lungo il ramo ascendente, col segno + lungo il ramo discendente. Evidentemente risulta

$$\operatorname{tg} i = \frac{\dot{y}}{\dot{x}},$$

<sup>(12)</sup> Cfr. (2)<sub>1</sub> e n.º precedente, in principio.

in modo che da  $\alpha$ ) e (24) si può trarre

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i = \frac{\pi}{2}.$$

**8. Confronto della traiettoria atmosferica con le parabole ad asse verticale: angolo di caduta, curvatura della traiettoria, ecc.** — Nel piano di tiro sia  $\tilde{\omega}$  una qualunque parabola ad asse verticale volgente la concavità verso il basso: l'equazione di  $\tilde{\omega}$  sarà del tipo

$$y = \frac{1}{2} kx^2 + k'x + k''$$

con  $k, k', k''$  costanti e  $k > 0$ .

Per ogni valore finito di  $t$  dalle (2) [insieme a  $\dot{x} > 0$ ] esattamente risulta

$$(27) \quad g\dot{x} = \dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} = \dot{x}^2 \frac{d}{dt} \frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

Accennando con

$$y = y(x)$$

l'equazione di  $l$ , si ha  $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = y'(x)$  e la (27) può sostituirsi con

$$(27') \quad y''(x) = \frac{g}{x^2}.$$

Di qui, pel solo fatto che  $\frac{g}{x^2}$  è sempre positivo, segue in primo luogo che (al variare di  $t$  da 0 a  $\infty$ )  $i = \text{arctg } y'$  va sempre crescendo, da  $-\varphi$  a  $\frac{\pi}{2}$ : *la traiettoria atmosferica, lungo tutto il suo percorso, volge la concavità verso il basso*. Insieme, essendo

$$\dot{x} = v \cos i, \quad (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\cos^3 i},$$

la (27') dà luogo per la curvatura di  $l$  all'espressione <sup>(12)</sup>

$$(28) \quad c = \frac{g \cos i}{v^2}$$

esente da ogni intervento diretto della resistenza di mezzo.

La circostanza ulteriore che  $\frac{g}{x^2}$  (al variare di  $t$  da 0 a  $\infty$ ) va

<sup>(12)</sup> La stessa espressione di  $c$  può ottenersi semplicemente proiettando la (1) sulla normale principale a  $l$ .

sempre crescendo <sup>(14)</sup>, permette di ricavare da (27') il teorema di OLLERO:  $\mathfrak{C}$  non può avere in comune con  $l$  più di tre punti reali (distinti o coincidenti). Per dimostrare l'asserto procediamo per assurdo, ammettendo che l'equazione

$$y(x) - \left(\frac{1}{2} kx^2 + k'x + k''\right) = 0$$

ammetta quattro radici (reali). In tale ipotesi, pel teorema di ROLLE, l'equazione

$$y'(x) - (kx + k') = 0$$

dovrebbe ammettere almeno tre radici e l'equazione

$$y''(x) - k = 0$$

almeno due radici: ciò che è incompatibile con l'incondizionata monotonia di  $y''(x)$ .

Sia  $\mathfrak{C}_0$  la  $\mathfrak{C}$  cui si riduce  $l$  nel vuoto (a parità di  $P_0$  e  $v_0$ ). Per effetto di (28) tale parabola — parabola di velocità — può anche definirsi come la  $\mathfrak{C}$  che tocca  $l$  in  $P_0$  e ivi ha la stessa curvatura di  $l$ . In altri termini,  $\mathfrak{C}_0$  ha in  $P_0$  un contatto tripunto con  $l$ : onde, pel teorema di OLLERO,  $\mathfrak{C}_0$  non può avere in comune con  $l$  alcun punto  $\neq P_0$ ; anzi per  $P \neq P_0$  il punto di  $\mathfrak{C}_0$  appartenente alla verticale per  $P$  è sempre situato al disopra di  $P$  (perchè, ad es.,  $\mathfrak{C}_0$  ha un punto proprio comune con  $a$ ). Ne segue, in particolare, che per ogni traiettoria atmosferica è  $X < X_r$ , ecc.

Il teorema di OLLERO semplicemente dà luogo anche ad altri notevoli corollari. Ad es., applicandolo alla  $\mathfrak{C}$  che passa per  $P_0$ ,  $V$  e  $B_*$ , subito se ne può trarre che per ogni traiettoria atmosferica la distanza dal vertice (computata orizzontalmente o anche in linea d'aria) è maggiore per  $P_0$  che per  $B_*$ .

Siano infine:  $\mathfrak{C}_1$  la  $\mathfrak{C}$  che tocca  $l$  in  $P_0$  e passa per  $B_*$ ;  $\mathfrak{C}_2$  la  $\mathfrak{C}$  che tocca  $l$  in  $B_*$  e passa per  $P_0$ ;  $\omega$  l'angolo di caduta, cioè il valore (positivo) di  $i$  in  $B_*$ ;  $c_0$  e  $c_*$  i valori di  $c$  in  $P_0$  e in  $P_*$ ;  $c'_0$  la curvatura di  $\mathfrak{C}_1$  in  $P_0$ ;  $c''_*$  la curvatura di  $\mathfrak{C}_2$  in  $B_*$  (che non può differire dalla curvatura di  $\mathfrak{C}_2$  in  $P_0$ , stante la simmetria di  $\mathfrak{C}_2$  rispetto all'asse  $P_0B_*$ ). Senza difficoltà si potrà verificare che le equazioni di  $\mathfrak{C}_1$  e di  $\mathfrak{C}_2$  rispettivamente sono date da

$$(29) \quad y = \frac{x(x - X)}{X} \operatorname{tg} \varphi$$

e

$$(29') \quad y = \frac{x(x - X)}{X} \operatorname{tg} \omega :$$

<sup>(14)</sup> Cfr. n.° precedente,  $\alpha$ ).

donde subito risulta

$$(30) \quad c_0' = \frac{2 \sin \varphi \cos^2 \varphi}{X}, \quad c_*'' = \frac{2 \sin \omega \cos^2 \omega}{X}.$$

Pel teorema di OLLERO nè la  $\tilde{\omega}_1$ , nè la  $\tilde{\omega}_2$  possono avere in comune con  $l$  alcun punto diverso da  $P_0$  e  $B_*$ : e resta pure escluso un qualunque contatto di  $l$  con  $\tilde{\omega}_1$  in  $B_*$ , nonchè un contatto tripunto di  $l$  con  $\tilde{\omega}_1$  in  $P_0$  e di  $l$  con  $\tilde{\omega}_2$  in  $B_*$ ; anzi <sup>(15)</sup> l'arco  $P_0 B_*$  di  $l$  risulta tutto compreso tra  $\tilde{\omega}_1$  e  $\tilde{\omega}_2$ . In particolare rimane stabilito che:

1°) per

$$0 < x < X$$

è sempre <sup>(16)</sup>

$$(31) \quad |y(x)| > \frac{x}{X} \left(1 - \frac{x}{X}\right) X \operatorname{tg} \varphi;$$

2°) per ogni traiettoria atmosferica è

$$(32) \quad \varphi < \omega,$$

nonchè

$$(33) \quad c_0 < c_0', \quad c_* > c_*''.$$

Nell'intervallo  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  la funzione  $f(u) = \sin u \cos^2 u$  è crescente <sup>(17)</sup>

per  $u < \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}$ , decrescente per  $u > \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}$ . In conseguenza, almeno per

$$\omega < \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

dalle (30), (32) e (33) — insieme a  $c_0' < c_*''$  — si può trarre

$$(34) \quad c_0 < c_*.$$

Come nei numeri precedenti, sia  $P'$  il punto generico del ramo ascendente e  $P''$  il punto di ugual quota verticale del ramo discen-

<sup>(15)</sup> Per l'esatta deduzione dell'asserto basta ad es. tener conto del fatto che tanto  $\tilde{\omega}_1$ , quanto  $\tilde{\omega}_2$  ha in comune con  $\alpha$  un punto al finito; mentre  $\tilde{\omega}_2$  tocca  $l$  in  $B_*$ , ecc.

<sup>(16)</sup> La (31) può trovare un'applicazione concreta nel tiro sopra ostacoli, quando non si disponga di « traiettorie grafiche » ma solo di una tavola di tiro rudimentale, che in corrispondenza a ogni carica di lancio si limiti ad assegnare  $\varphi$  in funzione di  $X$ . Ancor più semplice diviene l'impiego della (31) se si tratta di armi a inclinazione costante (ad es. =  $45^\circ$ ) e preventivamente si calcola una tabelletta dei valori della funzione  $u(1-u)$  nell'intervallo  $(0, 1)$ .

<sup>(17)</sup> Invero risulta  $f'(u) = \cos^3 u(1 - 2 \operatorname{tg}^2 u)$ , ecc..

dente. Basta pensare  $P'$  come origine della traiettoria, perchè la (32) si generalizzi in

$$|i_{P'}| < |i_{P''}|$$

e la (34) venga ad affermare che per ogni traiettoria atmosferica almeno in prossimità del vertice (e precisamente almeno finchè  $i_{P''}$  non superi  $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}$ ) a parità di quota verticale la curvatura è maggiore nel ramo discendente che nel ramo ascendente.

**9. Confronto della traiettoria atmosferica con le traiettorie sotto resistenza viscosa.** — Per

$$\mu(y) = \text{cost.} > 0 \quad (\text{mezzo resistente omogeneo})$$

e

$$\frac{f(v)}{v} = \text{cost.} > 0 \quad (\text{resistenza viscosa})$$

le (2) si riducono a

$$(35) \quad \ddot{x} = -k\dot{x}, \quad \ddot{y} = g - ky$$

con

$$k = \text{cost.} > 0$$

e la loro completa integrazione non offre più alcuna difficoltà.

Sia  $\lambda$  una qualunque delle linee integrali del sistema (35): almeno quando sia <sup>(18)</sup>

$$(36) \quad k < \frac{1}{\tau_1}$$

$\lambda$  non può avere in comune con  $l$  più di tre punti (distinti o coincidenti).

Per convincersi dell'asserto basta riprendere la dimostrazione del teorema di OLLERO, rilevando preventivamente che dalla (2)<sub>1</sub>, per ogni  $x$  da 0 a  $x_a$ , si può trarre

$$-\frac{1}{\tau_1} > \frac{\ddot{x}}{\dot{x}} = \frac{d\dot{x}}{dx};$$

mentre la (35)<sub>1</sub> implica, con ovvio significato dei simboli,

$$\left(\frac{d\dot{x}}{dx}\right)_\lambda = -k,$$

nonchè

$$\left(\frac{d\dot{x}}{dx}\right)_\lambda > \frac{d\dot{x}}{dx}$$

<sup>(18)</sup> Cfr. n.° 7.

almeno quanto sussiste la (36). Basta questo per garantire che (fra 0 e  $x_0$ ) non può esistere più di un valore di  $x$  in corrispondenza al quale si abbia

$$\frac{g}{x^2} = \left(\frac{g}{x^2}\right)_\lambda;$$

cioè [cfr. (27')] l'equazione

$$y''(x) - y''_\lambda(x) = 0$$

non può avere più di una radice, ecc.