Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Luigi Castoldi

Osservazioni sulla funzione hamiltoniana e sull'energia totale di un sistema dinamico

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2, Vol. **1** (1939), n.5, p. 451–457.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_5_451_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1939.

Osservazioni sulla funzione hamiltoniana e sull'energia totale di un sistema dinamico.

Nota di LUIGI CASTOLDI (a Pavia).

Sunto. - *Si stabiliscono condizioni necessarie e sufficienti affinchè la funzione hamiltoniana e l'energia totale di un sistema dinamico coincidano; e affinchè differiscano per una costante.*

1. Consideriamo un sistema olonomo conservativo di N punti $P_1, P_2, \ldots, P_N$ con n gradi di libertà caratterizzati dalle coordinate lagrangiane $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Sarà:

$$P_i = P_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N); \tag{1}$$

i secondi membri non dipendendo dal tempo quando neppure i vincoli ne dipendano.

Usando notazioni consuete, indicheremo con $T(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t)$ l'energia cinetica, con $U(P_1, P_2, \ldots, P_n) \equiv U(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$ l'energia potenziale del sistema; e si noti che U dipende dal tempo soltanto in quanto ne dipendano $P_1, P_2, \ldots, P_N$.

Denotiamo poi con

$$L = T - U \tag{2}$$

la funzione lagrangiana, e con

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L \tag{3}$$

la funzione hamiltoniana del sistema, avendo posto:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}. \tag{4}$$

Pensando H come funzione delle q_h, delle p_h e di t (per avervi sostituite le $\dot{q}_h$ colle loro espressioni nelle p_h e in t che si ricavano da (4)), le equazioni canoniche della dinamica del sistema sono notoriamente:

$$\left\{\begin{aligned} \dot{q}_k &= \frac{\partial H}{\partial p_k}, \\ \dot{p}_k &= -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \end{aligned}\right. \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Da (3) e (5) seguono, come pure è noto, le identità:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \tag{6}$$

cosicchè se L non dipende esplicitamente dal tempo, H è costante $\left(\frac{dH}{dt} = 0\right)$. In particolare ciò avviene se i vincoli sono fissi, poichè allora T, U e quindi L non contengono esplicitamente il tempo. In tal caso inoltre la funzione H coincide coll'energia totale (costante) $E = T + U$.

2. Sorge naturalmente la domanda se sia possibile invertire (nei varî modi in cui tale inversione è *a priori* effettuabile) questa proprietà. Precisamente: supponiamo che di un sistema dinamico si sappia soltanto che è conservativo e che la funzione H è costante per un moto *qualunque* [1] del sistema; il valore di tale costante potendo variare da moto a moto. È lecito dedurre da ciò che anche E è costante? Viceversa dalla costanza di E per un moto qualunque è lecito dedurre quella di H? Ancora: possono E ed H

[1] L'integrale generale delle (5) contiene $2n$ costanti arbitrarie, in corrispondenza delle quali risultano definiti ∞^{2n} moti possibili per il sistema. Un particolare moto può essere individuato mediante condizioni iniziali (per $t = t_0$, $q_h = q_{h0}$, $p = p_{h0}$) o mediante condizioni agli estremi (per $t = t_0$, $q_h = q_{h0}$; per $t = t_1$, $q_h = q_{h1}$, oppure: per $t = t_0$, $p_h = p_{h0}$; per $t = t_1$, $p_h = p_{h1}$). Parlando di un moto *qualunque* intendiamo di lasciare indeterminate le $2n$ costanti arbitrarie, cosicchè ad ogni istante t pensiamo associati ∞^{2n} sistemi di valori delle p e delle q, ciascuno dei quali caratterizza, insieme con t, un particolare moto. Dire che una proprietà vale per un moto qualunque significa che tale proprietà vale in ogni istante t per un qualunque sistema delle q_h e delle p_h. Infine una relazione del tipo $F(q_h, p_h, t) = 0$ valida per un moto qualunque è un'identità nelle t, q_h, p_h.

essere entrambe costanti essendo $E \neq H$? E dall'essere $E = H =$ costante è lecito concludere che i vincoli sono fissi? Infine, possono E ed H essere uguali senza essere costanti?

A tutte queste domande rispondono le seguenti proposizioni:

a) « *Condizione necessaria e sufficiente affinchè sia, per un moto qualunque,* H $=$ E *è che i vincoli siano indipendenti dal tempo* ».

Infatti, posto:

$$(7)\qquad \begin{cases} a_{hk} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \times \frac{\partial P_i}{\partial q_k}, \\ a_h = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial P_i}{\partial t} \times \frac{\partial P_i}{\partial q_h}, \\ T_0 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial P_i}{\partial t}\right)^2, \end{cases} \qquad (h, k = 1, 2, \dots, n).$$

le a_{hk}, a_h, T_0 risultando così in generale funzioni delle q_h e di t. si ha:

$$(8)\qquad T = \sum_{h,k=1}^{n} a_{hk}\dot{q}_h\dot{q}_k + \sum_{h=1}^{n} a_h\dot{q}_h + T_0.$$

Supponiamo $H = E$ in un moto qualunque. In tale ipotesi si ha, per (2), (3):

$$\sum_{h=1}^{n} p_h\dot{q}_h - T = T,$$

ossia:

$$(9)\qquad \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}\dot{q}_h = 2T;$$

e ciò significa che la funzione T è omogenea di secondo grado nelle $\dot{q}_h$, ossia che è:

$$(10)\qquad a_h = 0 \ (h = 1, 2, \dots, n); \quad T_0 = 0.$$

Ma l'ultima delle (10), ricordando la terza delle (7), si verifica soltanto se è:

$$(11)\qquad \frac{\partial P_i}{\partial t} = 0, \qquad (i = 1, 2, \dots, N).$$

cioè se i vincoli non dipendono dal tempo.

Inversamente da (11), in virtù di (7), seguono le (10), indi le (9) e infine: $H = E$.

La proposizione a) si può modificare nel seguente modo:

b) « *Condizione necessaria e sufficiente affinchè sia* H $=$ E *in un moto qualunque è che* E (*ed* H) *siano costanti* ».

Infatti se $H = E$ scende dalla proposizione a) che i vincoli sono fissi e quindi E e H costanti. Inversamente se E è costante per un moto qualunque, i vincoli sono fissi. Invero, escluso il caso di vincoli cosiffatti che le loro reazioni siano sempre nulle per un moto qualunque ([2]), nella quale eventualità i vincoli sono puramente apparenti in quanto la loro soppressione non modifica il moto; considerando cioè vincoli effettivi, questi, se dipendono dal tempo, compiono lavoro per un moto generico del sistema ([3]), il che esclude che per un moto qualunque sia $E =$ costante. Ma con vincoli fissi è $E = H$, e quindi la proposizione è provata.

c) « *Condizione necessaria e sufficiente affinchè* E *e* H, *essendo entrambe variabili, differiscano per una costante non nulla durante un moto qualunque del sistema è che i vincoli siano tali che quelle, tra le* 3N *coordinate cartesiane dei punti del sistema, che dipendono effettivamente dal tempo, siano funzioni lineari di* t *e delle* q_h *a coefficienti costanti, cioè del tipo:*

$$(12) \qquad \begin{cases} x_i = \sum_{h=1}^{n} \lambda_{ih} q_h + \alpha_i t, \\ y_i = \sum_{h=1}^{n} \mu_{ih} q_h + \beta_i t, \\ z_i = \sum_{h=1}^{n} \nu_{ih} q_h + \gamma_i t, \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

con le λ_{ih}, μ_{ih}, ν_{ih}, α_i, β_i, γ_i *costanti assolute soddisfacenti le relazioni*

$$(13) \qquad a_h \equiv \sum_{i=1}^{N} \lambda_{ih}\alpha_i + \mu_{ih}\beta_i + \nu_{ih}\gamma_i = 0. \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Le eventuali coordinate che non dipendono dal tempo possono essere funzioni a priori *qualunque delle* q_h ».

Infatti, posto

$$T_2 = \sum_{h,k=1}^{n} a_{hk}\dot q_h \dot q_k; \quad T_1 = \sum_{h=1}^{n} a_h \dot q_h,$$

da (8), (5) e (4) si ottiene:

$$T = T_2 + T_1 + T_0,$$
$$H = 2T_2 + T_1 - (T_2 + T_1 + T_0) + U = T_2 - T_0 + U.$$

e infine:

$$(14) \qquad E = H + T_1 + 2T_0.$$

([2]) Si pensi per es. a un piano orizzontale cadente liberamente nel vuoto e a un punto mobile su di esso per una velocità preconcetta.

([3]) Potrebbe interessare lo studio degli eventuali moti di un sistema a vincoli effettivi e dipendenti dal tempo per i quali valga l'integrale dell'energia cinetica, che avvengono cioè senza lavoro da parte dei vincoli; ma di tale questione ci potremo occupare eventualmente a parte.

Ora notiamo che l'ipotesi che E e H differiscano di una costante durante un moto qualunque del sistema equivale all'altra, che la differenza $E-H$ sia una costante assoluta (indipendente da t, q_h, $\dot{q}_h$).

Infatti consideriamo due moti, che indicheremo con (M_1), (M_2), definiti mediante condizioni agli estremi nel modo che risulta ovviamente dalle scritture seguenti:

$$(M_1) \equiv [t_0, q_h, \dot{q}_h; \; t_1, q_{h1}, \dot{q}_{h1}]; \quad (M_2) \equiv [t_0, q_h, \dot{q}_h; \; t_2, q_{h2}, \dot{q}_{h2}].$$

Supponiamo, se possibile, che al moto (M_1) competa un valore costante $(E-H)_1$ della differenza $E-H$, al moto (M_2) un valore $(E-H)_2$, e che sia $(E-H)_1 \neq (E-H)_2$.

Consideriamo ora il moto (M_{12}) definito mediante condizioni agli estremi da:

$$(M_{12}) \equiv [t_1, q_{h1}, \dot{q}_{h1}; \; t_2, q_{h2}, \dot{q}_{h2}].$$

Indichiamo con $(E-H)_{12}$ il valore costante di $E-H$ durante il moto (M_{12}). Poichè la differenza $E-H$ dipende unicamente da t, q_h, $\dot{q}_h$, $(E-H)$ dovrebbe assumere all'istante t_1 il valore $(E-H)_1$, all'istante t_2 il valore $(E-H)_2$; e ciò è impossibile poichè $(E-H)_1 \neq (E-H)_2$.

Inversamente, se $E-H$ è costante assoluta, è costante in particolare durante ogni singolo moto del sistema.

Stabilito ciò, la costanza assoluta di $E-H$, in virtù di (14), richiede che sia:

$$\frac{\partial}{\partial t}(T_1 + 2T_0) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial q_h}(T_1 + 2T_0) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial \dot{q}_h}(T_1 + 2T_0) = 0;$$
$$(h = 1, 2, \ldots, n),$$

Dalla terza di tali relazioni segue $a_h = 0$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$, ossia $T_1 = 0$; e dalle prime due si conclude che T_0 è una costante assoluta.

Quest'ultimo risultato implica che ogni coordinata che contenga effettivamente il tempo deve dipenderne linearmente con coefficiente costante assoluta; mentre dalla seconda delle (7), per l'annullarsi assoluto delle a_h, si conclude che una coordinata che non contenga il tempo può dipendere comunque dalle q_h, ma che una coordinata che contiene t deve dipendere linearmente con coefficienti costanti anche dalle q_h, (cioè deve essere del tipo (12)): e devono verificarsi le (13).

Inversamente se le coordinate che dipendono dal tempo hanno le espressioni (12), nelle quali i coefficienti sono costanti assolute verificanti le (13), le a_h $(h = 1, 2, \ldots, n)$ son nulle e T_0 è costante assoluta. Cosicchè è costante assoluta $T_1 + 2T_0$ e infine $E-H$.

3. Le proposizioni testè dimostrate rispondono completamente alle domande poste in principio.

Riassumendo, e rilevando un aspetto negativo notevole dei risultati conseguiti, possiamo dire che:

Le condizioni E = H ; E (*e* H) *costanti; vincoli indipendenti dal tempo sono equivalenti.*

Dalla costanza di H *non consegue in generale la costanza di* E.

Terminiamo illustrando i risultati ottenuti con due esempi:

1°) Un punto materiale P di massa m è mobile per velocità preconcetta su un piano orizzontale Π. Quest'ultimo si sposta contemporaneamente di moto traslatorio con velocità costante $\mathbf{w}$ lungo la direzione perpendicolare alla propria giacitura.

Assumiamo in Π un riferimento cartesiano (Oxy) con origine O in un punto della traiettoria di P, indi un asse z normale in O a Π e diretto come $\mathbf{w}$; infine prendi mo l'origine dei tempi nell'istante in cui P transita per O. Con tali convenzioni, x e y si possono considerare come coordinate lagrangiane di P, cosicchè attualmente valgono le (12) sotto la forma

$$(15)\qquad \begin{cases} x = x, \\ y = y, \\ z = wt, \end{cases}$$

e sono verificate le (13).

Possiamo senz'altro concludere, in virtù della proposizione c), che sarà $E - H =$ costante, con E e H entrambe funzioni del tempo.

Effettivamente si ha:

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + w^2)\,; \qquad U = mgwt,$$

$$L = m\left\{\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + w^2) - gwt\right\}; \qquad E = m\left\{\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + w^2) + gwt\right\},$$

$$p_x = m\dot{x}\,; \qquad p_y = m\dot{y},$$

$$H = m\left\{\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - w^2) + gwt\right\}.$$

Da quest'ultima risulta che le coordinate x, y sono ignorabili. Si hanno quindi, tenuto conto delle condizioni iniziali, gli integrali primi $\dot{x} = a$, $\dot{y} = b$ (a e b costanti). Sostituendo nelle precedenti si ha infine:

$$E = m\left\{\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + w^2) + gwt\right\}; \qquad H = m\left\{\frac{1}{2}(a^2 + b^2 - w^2) + gwt\right\},$$

sulle quali si verificano immediatamente le previsioni fatte.

2°) Nelle medesime condizioni dell'esempio precedente supponiamo che il piano Π si muova anzichè di moto traslatorio uniforme, di moto uniformemente accelerato con accelerazione opposta a quella **g** della gravità, a partire dalla quiete nell'istante $t = 0$. Si ha in questo caso:

$$(16) \qquad \begin{cases} x = x, \\ y = y, \\ z = \frac{1}{2} g t^2. \end{cases}$$

Non sono quindi soddisfatte le condizioni della proposizione c). È da aspettarsi che E ed H non differiscano di una costante; e poichè il vincolo compie in ogni caso lavoro contro il peso di P è certo che E è funzione del tempo. Effettivamente si ottiene:

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + g^2 t^2); \quad U = mgz = mg^2 \frac{t^2}{2};$$

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x} + \dot{y}^2); \quad E = m \left\{ \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + g^2 t^2 \right\}; \quad p_x = m\dot{x}; \quad p_y = m\dot{y};$$

$$H = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2).$$

Le coordinate x e y sono ignorabili; si hanno quindi gli integrali primi:

$$\dot{x} = a, \quad \dot{y} = b, \qquad (a \text{ e } b \text{ costanti}).$$

Sostituendo nelle precedenti si ha infine:

$$E = m \left\{ \frac{1}{2}(a^2 + b^2) + g^2 t^2 \right\}; \quad H = \frac{1}{2} m(a^2 + b^2),$$

d'accordo colle previsioni fatte.