Bollettino Unione Matematica Italiana

Carlo Cattaneo

Libera caduta di un solido pesante con riguardo alla rotazione terrestre

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2, Vol. **1** (1939), n.5, p. 445–451.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_5_445_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1939.

Libera caduta di un solido pesante con riguardo alla rotazione terrestre.

Nota di CARLO CATTANEO (a Roma).

Sunto. - *Moto attorno al baricentro di un solido pesante cadente nel vuoto, con referenza alle stelle fisse; moto attorno al baricentro con referenza alla Terra. Caso di un solido a ellissoide centrale rotondo senza forza viva iniziale (terrestre).*

1. I problemi di dinamica terrestre si trattano generalmente come problemi galileiani, completando il sistema delle forze attive con le cosidette forze apparenti del moto relativo (forze di trascinamento e forze centrifughe composte). Ma non sempre questo modo di procedere è il più comodo, chè talvolta appare più conveniente studiare dapprima il moto rispetto a un riferimento inerziale, o per lo meno di orientamento invariabile, per passare successivamente al moto relativo (alla Terra). NEWTON ha dato il primo esempio di questo procedimento, applicandolo a dimostrare la deviazione dei gravi verso oriente.

Lo stesso criterio vogliamo adottare per il problema analogo della caduta, nel vuoto, di un solido pesante, con speciale riguardo al caso di un sistema rigido ad ellissoide centrale d'inerzia rotondo, abbandonato a se stesso senza velocità angolare iniziale (rispetto alla Terra).

2. Sia C_r un sistema rigido pesante, liberamente cadente nel vuoto; indichiamone con G il baricentro. La determinazione del moto di G si riconduce, come è ben noto, allo studio della caduta di un grave puntiforme (teorema del moto del baricentro); tralasciamo perciò di occuparcene, e consideriamo esclusivamente il moto di C_r attorno a G.

Sia T la Terra; indichiamo inoltre con $\mathcal{T}$ una terna d'orientamento invariabile (rispetto alle stelle fisse) avente l'origine in G, e con $\mathcal{T}_T$ una terna coll'origine in G e di orientamento invariabile rispetto alla Terra.

Per il moto di C_r rispetto a $\mathcal{T}$ la seconda equazione cardinale della Dinamica fornisce, con evidente significato dei simboli [1]:

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{M}^{(e)}, \tag{1}$$

[1] Cfr. ad es.: A. SIGNORINI, *Meccanica Razionale con Elementi di Statica Grafica.* (Napoli, 1939), vol. II, pagg. 18-19.

essendosi scelto in G il centro di riduzione dei momenti. Le forze esterne agenti su C_r si esauriscono nel complesso delle attrazioni elementari terrestri che naturalmente intenderemo sensibilmente parallele e d'intensità proporzionale alle masse elementari e quindi riducibili (vettorialmente) a un'unica forza applicata in G. È nullo perciò il secondo membro di (1) e ne consegue:

$$\mathbf{K} = \text{cost.}, \tag{1'}$$

ciò che esprime essere il moto di C_r rispetto a $\mathcal{C}$ del tipo alla Poinsot.

Se ora indichiamo con ω_T la velocità angolare terrestre (da intendersi costante rispetto a $\mathcal{C}$), e dal moto di C_r rispetto a $\mathcal{C}$ passiamo al suo moto rispetto alla terna $\mathcal{C}_T$, con l'ordinaria terminologia della teoria dei moti relativi si può dire che *con referenza alla Terra il moto attorno al baricentro di un solido liberamente cadente risulta dalla composizione di un moto alla Poinsot con un moto rotatorio uniforme di velocità angolare* $-\omega_T$.

Prima di lasciare il caso generale aggiungiamo che tale movimento composto è ancora del tipo alla Poinsot tutte le volte che $\mathbf{K}$ inizialmente, e quindi anche in ogni altro istante, è parallelo all'asse terrestre (ossia a ω_T). Questo a norma del teorema di Sylvester [2].

3. Supponiamo che C_r venga abbandonato a se stesso senza forza viva iniziale (rispetto alla Terra). Dalla relazione cinematica dei moti rigidi relativi

$$\omega_a(t) = \omega_T(t) + \omega_r(t), \tag{2}$$

consegue che la velocità angolare assoluta (cioè rispetto a $\mathcal{C}$) iniziale di C_r vale

$$\omega_a(0) = \omega_T. \tag{3}$$

Ricordiamo ora che « condizione necessaria e sufficiente perchè un moto alla Poinsot si riduca a una rotazione uniforme è che inizialmente la velocità angolare sia diretta come uno degli assi principali d'inerzia del solido » [3].

Nel caso presente il moto di C_r rispetto a $\mathcal{C}$ si ridurrà a una rotazione permanente quando e solo quando ω_T sia parallelo a uno degli assi centrali d'inerzia di C_r; in tal caso, e solo allora, sarà

$$\omega_a(t) \equiv \omega_T, \tag{4}$$

(2) Cfr. ad es.: V. Volterra, *Conférences sur quelques questions de mécanique et de physique mathématique.* (Paris, Gauthier-Villars, 1938), pag. 23.

(3) Cfr. ad es.: A. Signorini, op. cit., vol. II, pag. 51.

ovvero

(5) $$\omega_r(t) \equiv 0.$$

Si ritrova così, semplicemente, un risultato già precisato, per la via consueta, dal prof. M. PASCAL [4]:

Con riferimento alla Terra, un solido pesante abbandonato a se stesso senza velocità angolare iniziale, acquista una velocità angolare se, e solo se inizialmente nessuno dei suoi assi centrali d'inerzia è parallelo all'asse terrestre.

4. Specializziamo ulteriormente le ipotesi, supponendo che C_r abbia ellissoide centrale rotondo [5]; $\mathcal{T}^* \equiv G\xi\eta\zeta$ sia terna centrale d'inerzia (solidale a C_r); e sia, per esempio $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \neq \mathfrak{C}$.

In tal caso il movimento rispetto a $\mathcal{T}$ di C_r (qualunque ne sia l'atto di moto iniziale) si riduce, come è noto, a una precessione regolare [6] (che degenera in una rotazione permanente nelle ipotesi precisate al numero precedente).

Si avrà perciò ad ogni istante

(6) $$\omega_a = \omega_1 + \omega_2,$$

essendo ω_1 un vettore invariabile (rispetto a $\mathcal{T}$) parallelo a $\mathbf{K}$ e ω_2 un vettore di lunghezza costante, sempre diretto come l'asse ζ, formante con ω_1 un angolo ψ d'ampiezza costante.

Per avere la velocità angolare di C_r rispetto a $\mathcal{T}_T$, bisognerà, al solito, ricorrere alla (2), con che si avrà

(7) $$\omega_r = \omega_1 + \omega_2 - \omega_T.$$

Supposto C_r senza forza viva iniziale (rispetto alla Terra), all'inizio della caduta ($t = 0$) varrà la relazione

(7') $$\omega_1(0) + \omega_2(0) - \omega_T = 0.$$

I tre vettori ω_T, ω_1, ω_2, di lunghezza invariabile, sono dunque, inizialmente, complanari. Ma questa complanarità non si conserva poichè (con referenza a $\mathcal{T}$) il piano (G, ω_1, ω_2), ruota uniformemente attorno a (G, ω_1); sicchè nell'istante generico il secondo membro di (7), e quindi ω_r, risulta differente da zero.

Precisamente dalle (7) e (7'), tenuto conto dell'invariabilità rispetto a $\mathcal{T}$ di ω_T e di ω_1, consegue che ω_r è a ogni istante equi-

[4] M. PASCAL, *Su un fenomeno osservato da Guglielmini a Bologna nel 1791.* « Atti del I Congresso dell'Unione Matematica Italiana », (Bologna, Zanichelli, 1938).

[5] A solidi di questo tipo si riferivano le esperienze che svolse in Bologna l'abate Guglielmini.

[6] Cfr. ad es.: A. SIGNORINI, op. cit., vol. II, pag. 53.

pollente al vettore che dall'estremo libero di $[G, \boldsymbol{\omega}_2(0)]$ va all'estremo libero di $[G, \boldsymbol{\omega}_2(t)]$. Ora, con referenza alla $\mathcal{T}$, l'estremo libero di $[G, \boldsymbol{\omega}_2(t)]$ descrive, con velocità angolare costante ω_1, una circonferenza di raggio

$$R = \omega_2 \sin \psi,$$

giacente in un piano normale a $\mathbf{K}$; $\boldsymbol{\omega}_r$ è dunque costantemente ortogonale a $\mathbf{K}$ e ha direzione uniformemente variabile: per completarne la valutazione calcoliamoci, in funzione dell'inclinazione iniziale φ dell'asse ζ rispetto all'asse terrestre (unico parametro arbitrario essenziale agli effetti del moto) le grandezze ω_1, ω_2, ψ.

Allo scopo, poichè tali grandezze sono invariabili nel tempo, riferiamoci all'istante $t = 0$, scegliendo come asse ξ della terna $\mathcal{T}^*$ la retta normale a ζ (e solidale a C_r) che in tale istante giace nel piano $(G, \boldsymbol{\omega}_T, \zeta)$; orienteremo ξ e ζ in maniera che gli angoli da da essi formati con $\boldsymbol{\omega}_T$ non siano ottusi [7] e porremo

$$\varphi = \widehat{\zeta \boldsymbol{\omega}_T}.$$

Chiamate, come d'abitudine, p, q, r le componenti di $\boldsymbol{\omega}_a$ sugli assi di $\mathcal{T}^*$ avremo per $t = 0$

$$(8) \qquad \begin{cases} p(0) = \omega_T \sin \varphi, \\ q(0) = 0, \\ r(0) = \omega_T \cos \varphi, \end{cases}$$

e conseguentemente

$$(9) \qquad \begin{cases} K_\xi(0) = \mathcal{A}\omega_T \sin \varphi, \\ K_\eta(0) = 0, \\ K_\zeta(0) = \mathcal{C}\omega_T \cos \varphi. \end{cases}$$

Posto poi

$$(10) \qquad \omega_1 = aK,$$

con referenza alla coppia d'assi $\xi\zeta$ e all'istante $t = 0$, si ha ancora:

$$(11) \qquad \begin{cases} \omega_{1\xi}(0) = a\mathcal{A}\omega_T \sin \varphi, \\ \omega_{1\zeta}(0) = a\mathcal{C}\omega_T \cos \varphi, \end{cases}$$

e

$$(12) \qquad \begin{cases} \omega_{2\xi}(0) = 0, \\ \omega_{2\zeta}(0) = \pm \omega_2, \end{cases}$$

andando scelto il segno $+$ o $-$ a seconda che sia $\mathcal{A} > \mathcal{C}$ o $\mathcal{A} < \mathcal{C}$.

[7] Possiamo anzi senz'altro supporli ambedue acuti e diversi da zero dato che i casi $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ rientrano in quelli considerati al numero precedente.

Finalmente proiettando la (7′) sugli assi ξ e ζ con riguardo alle (11) e (12) si ha

$$a = 1/\mathfrak{A},$$

$$(13)\qquad \begin{cases} \omega_1 = \omega_T \sqrt{\sin^2\varphi + \dfrac{\mathfrak{C}^2}{\mathfrak{A}^2}\cos^2\varphi}, \\ \omega_2 = \omega_T \cos\varphi \left|1 - \dfrac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}\right|. \end{cases}$$

L'angolo ψ è definito, inizialmente e quindi a ogni istante, dall'una o dall'altra delle relazioni

$$(14)\qquad \begin{cases} \cos\psi = \pm\cos\varphi\,\dfrac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} \Big/ \sqrt{\sin^2\varphi + \dfrac{\mathfrak{C}^2}{\mathfrak{A}^2}\cos^2\varphi}, \\ \sin\psi = \sin\varphi \Big/ \sqrt{\sin^2\varphi + \dfrac{\mathfrak{C}^2}{\mathfrak{A}^2}\cos^2\varphi}, \end{cases}$$

colla solita avvertenza circa il doppio segno.

Il raggio R della circonferenza descritta dall'estremo libero di $[G, \omega_2(t)]$ vale

$$(15)\qquad R = \omega_T \left|1 - \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}\right| \sin 2\varphi \Big/ 2\sqrt{\sin^2\varphi + \frac{\mathfrak{C}^2}{\mathfrak{A}^2}\cos^2\varphi},$$

e finalmente

$$(16)\qquad \omega_r = 2R\sin\frac{\omega_1 t}{2} = \sin 2\varphi \left|1 - \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}\right| \omega_T \sin\frac{\omega_1 t}{2} \Big/ \sqrt{\sin^2\varphi + \frac{\mathfrak{C}^2}{\mathfrak{A}^2}\cos^2\varphi};$$

quanto all'orientamento (variabile) di ω_r, esso è già stato individuato geometricamente. Osserviamo soltanto esplicitamente che la sua direzione iniziale (cioè al tendere di t a zero) è ortogonale al piano (G, ω_1, ζ).

Da un punto di vista puramente matematico concludiamo: nel vuoto e con riferimento alla Terra, C_r, pur cadendo senza forza viva iniziale, in generale acquista una certa velocità angolare, ma, data la periodicità di ω_r, *il fenomeno non si esalta indefinitamente nel tempo.*

L'ultima osservazione tuttavia *non può avere valore fisico* perchè praticamente interessa l'andamento di ω_r non per la durata di un intero o anche di un mezzo periodo [8], bensì solamente durante il breve intervallo di tempo $\left(\text{dell'ordine di pochi secondi, e perciò enormemente piccolo rispetto a } \dfrac{2\pi}{\omega_1}\right)$ nel quale si può realizzare

[8] Il periodo di ω_r, a norma della $(13)_1$ è dell'ordine di grandezza di un giorno.

un'effettiva esperienza di caduta. Limitiamoci perciò a studiare, sia pure approssimativamente, il moto di C_r rispetto alla Terra nella fase iniziale. Ciò corrisponde, nello sviluppo di MAC-LAURIN di ω_r (con referenza alla $\mathcal{T}_T$) a tener conto del solo termine significativo d'ordine minimo; a porre cioè $\left(\text{indicando con } \frac{d}{dt}\omega_r \text{ il derivato temporale di } \omega_r \text{ rispetto alla } \mathcal{T}_T\right)$

$$\omega_r(t) = \left(\frac{d}{dt}\omega_r\right)_{t=0} \cdot t. \tag{17}$$

Tenuto presente che, nell'istante $t = 0$, $\frac{d\omega_r}{dt}$ è identico al derivato temporale di ω_r rispetto alla terna $\mathcal{T}$ (dato che inizialmente è $\omega_r = 0$) la (17) si precisa facilmente così:

$$\omega_r(t) = \frac{t}{2}\omega_T^2 \sin 2\varphi \left| 1 - \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} \right| \mathbf{c}, \tag{17'}$$

essendo $\mathbf{c}$ un versore, solidale a $\mathcal{T}_T$, ortogonale a ω_T e alla posizione iniziale di ζ, e orientato in modo che, applicato per es. in G, risulti levogiro rispetto all'asse terrestre orientato da sud verso nord ([9]).

In definitiva il moto attorno al baricentro di un solido pesante a struttura giroscopica e con atto di moto iniziale nullo, si può in prima approssimazione confondere con un moto rotatorio attorno a una retta perpendicolare all'asse terrestre e alla posizione iniziale dell'asse di simmetria dell'ellissoide centrale d'inerzia.

La grandezza della velocità angolare cresce proporzionalmente al tempo. Se poi si considera la deviazione che, durante la caduta, subisce una retta solidale a C_r e normale a $\mathbf{c}$ (ad esempio l'asse ζ), si vede che essa cresce proporzionalmente al quadrato del tempo:

$$|\Delta\varphi| = \frac{t^2}{4}\omega_T^2 \left| 1 - \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} \right| \sin 2\varphi. \tag{18}$$

Le (17') e (18) sono in certo modo analoghe alle formule che danno, in funzione del tempo, la velocità e lo spazio nella caduta dei gravi nel vuoto.

Se si immagina di realizzare l'esperienza lasciando cadere il solido coll'asse ζ inizialmente disposto secondo la verticale, la velocità angolare risulta (in prima approssimazione) diretta come il parallelo del luogo e orientata da ovest a est. È subito visto inoltre

([9]) Le convenzioni adottate circa l'orientamento delle velocità angolari sono quelle abituali. Cfr. ad es.: A. SIGNORINI, op. cit..

che l'angolo acuto formato da ζ coll'asse terrestre (non orientati), angolo inizialmente uguale alla colatitudine del luogo, tende ad aumentare nell'emisfero boreale, mentre tende a diminuire nell'emisfero australe.

Le deviazioni massime, a parità di altezza di caduta, si hanno, a norma della (18) in corrispondenza a un angolo φ di $45°$ [10].

Tuttavia l'ordine di grandezza di tali deviazioni, per lo meno nell'ambito delle esperienze presumibilmente effettuabili, è enormemente piccolo [11].

(10) Le esperienze del Guglielmini, se furono effettuate alla maniera suddetta, si svolsero dunque alla latitudine più adatta.

(11) Bisogna però notare che il fenomeno può venire notevolmente esaltato da una resistenza di mezzo: è forse questa la ragione per cui esso potè venire osservato.