

---

# BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

GIORGIO SESTINI

## Sulla dinamica di un particolare sistema piano

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie  
2, Vol. 1 (1939), n.5, p. 436-444.*

Unione Matematica Italiana

<[http://www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_1939\\_2\\_1\\_5\\_436\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_5_436_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

*SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

## Sulla dinamica di un particolare sistema piano.

Nota di G. SESTINI (a Firenze) (\*).

**Sunto.** - Un sistema materiale  $\Sigma$  è costituito da due parti rigide  $S_0$  ed  $S$ , collegate a cerniera in un punto  $P_0$  e mobili di moto piano. Durante il moto la tangente in  $P_0$  alla traiettoria prestabilita  $l_0$  di  $P_0$  è solidale con  $S_0$ , mentre un punto  $P$  di  $S$  è costretto a seguire una trattrice  $l$  di  $l_0$ . Supposti i vincoli  $l$  ed  $l_0$  lisci, si determinano le reazioni esercitate da questi su  $\Sigma$  ed il loro comportamento in dipendenza dalle configurazioni di  $l$  ed  $l_0$ , oltre che dalla distribuzione delle masse di  $\Sigma$ .

**1. Premesse e posizione del problema.** — Consideriamo un sistema materiale  $\Sigma$ , costituito da due parti rigide  $S_0$  ed  $S$ , di masse  $m_0$  ed  $m$  rispettivamente. Ciascuna di queste parti si muova di moto rigido piano, sopra uno stesso piano orizzontale, e siano vincolate da una cerniera in un punto  $P_0$ . Il moto di  $S_0$  sia caratterizzato da quello di  $P_0$  in modo che un versore  $t_0$ , applicato in questo punto e solidale con  $S_0$ , risulti sempre tangente alla traiettoria  $l_0$  di  $P_0$ . Il moto di  $S$  resta poi perfettamente caratterizzato dal fatto che  $S$ , durante il moto, deve mantenersi solidale con il vettore  $P_0 - P = \lambda t$ , con  $\lambda > 0$ , essendo  $P$  un punto della sezione di  $S$  col piano del moto. Supporremo che i centri di massa di  $S_0$  ed  $S$  siano sul piano del moto, rispettivamente in  $P_0$  e in un punto  $G$ , interno al segmento  $P_0P$ , in generale distinto da  $P$ .

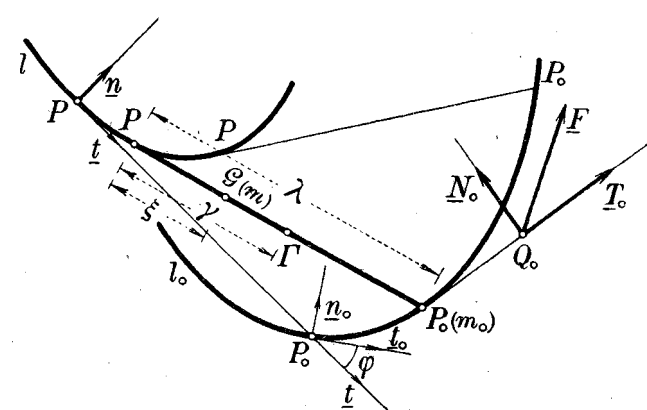
È ben noto che, se durante il moto si impediscono a  $P$  spostamenti trasversi a  $\overline{P_0P}$ , il punto  $P$  descrive una trattrice  $l$  di parametro  $\lambda$  della linea  $l_0$  descritta da  $P_0$ . Questa trattrice dipende, oltre che dalla base  $l_0$ , anche dalla posizione iniziale del vettore  $P_0 - P$ . Potendosi riguardare  $l$  come involuppo del vettore  $P_0 - P$ ,  $t$  si può assumere come versore tangente alla linea  $l$ .

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Matematico della R. Univ. di Firenze.

Sono note <sup>(1)</sup> le relazioni che intercedono tra gli elementi intrinseci delle linee  $l_0$  ed  $l$  e le loro proprietà interessanti la cinematica dei veicoli.

Assegnata per uno dei due punti  $P_0$  o  $P$  la traiettoria e la legge del moto su essa, a partire da una posizione iniziale di  $P_0 - P$ , resta perfettamente determinata la traiettoria dell'altro punto e la legge del moto di questo su quella. Gioverà notare che, nel moto rigido piano di  $S_0$  ed  $S$ , le velocità di rotazione dei due sistemi coincidono con quelle dei due versori  $t_0$  e  $t$  rispettivamente.

Il moto di  $\Sigma$  può ad esempio fornire una schematizzazione del moto di un veicolo a due ruote, quale una bicicletta, prescindendo dalle parti rotanti. Queste intervengono specialmente nel problema spaziale dell'equilibrio relativo, come è ben noto.



In questa Nota mi propongo di studiare, nelle condizioni schematiche indicate, le reazioni esercitate dai due punti  $P_0$  e  $P$  per mettere in rilievo la loro dipendenza dalla configurazione delle linee  $l_0$  ed  $l$ , oltre che dalla distribuzione delle masse di  $\Sigma$ .

Per realizzare il moto in questione, mentre ad es.  $P_0$  descrive una assegnata  $l_0$ , per evitare spostamenti di  $P$  normali a  $t$ , si può costringere  $P$  sulla sua  $l$ , preventivamente incisa sul piano o scavata da  $P$  stesso, facendo parte in tal caso  $P$  di un profilo tagliente, normale al piano del moto e proiettantesi su questo secondo  $t$ , come si suol fare in diversi apparecchi.

I vincoli rappresentati da  $l_0$  ed  $l$  siano senza attrito, quindi le reazioni vincolari si riducano alle reazioni normali  $\mathbf{R} = R\mathbf{n}$  in  $P$ .

(1) Cfr. B. CALDONAZZO, *Sulla geometria del moto dei veicoli*, « Note ed Eserc. del Circolo Matem. di Catania », vol. V, fasc. I, pp. 36-52, 1927.

$\mathbf{R}_0 = R_0 \mathbf{n}_0$  in  $P_0$ , essendo  $\mathbf{n}$  ed  $\mathbf{n}_0$  i versori normali principali alle linee  $l$  ed  $l_0$  e rivolti verso i rispettivi centri di curvatura. Le sollecitazioni attive del sistema siano costituite esclusivamente da una forza agente su  $S_0$  in un punto  $Q_0$  della retta di azione di  $\mathbf{t}_0$ , costituente in certo qual modo il timone del nostro veicolo schematico. Questa forza si può decomporre nella trazione  $T_0 \mathbf{t}_0$  parallela al timone ed in una forza trasversale  $N_0 \mathbf{n}_0$ . È questa forza che deve fornire il momento  $\mathfrak{M}_0$ , rispetto a  $P_0$ , necessario per far variare la rotazione di  $S_0$  assieme a  $\mathbf{t}_0$ . Se la guida  $l_0$  può reagire, oltre che con una reazione  $\mathbf{R}_0$ , anche con un momento  $\mathfrak{M}_0$ , non è più necessaria la forza trasversa  $N_0 \mathbf{n}_0$ . In tal caso però il contatto di  $S_0$  con  $l_0$  non può essere puntiforme, come avviene se  $\mathbf{t}_0$  è realizzata con un solco praticato sul piano del moto.

A conti fatti tutte le forze risultano espresse da combinazioni lineari omogenee delle accelerazioni tangenziale  $a_t$  e normale  $a_n$  di  $P$ , i coefficienti risultando funzioni delle costanti geometriche e materiali di  $\Sigma$ , del raggio di flessione di  $l$  e della derivata di questo rispetto all'arco  $s$  contato su  $l$ .

Nel caso in cui  $l$  sia una circonferenza od una retta, il che importa che anche  $l_0$  è una circonferenza od una retta,  $T_0$  dipende soltanto da  $a_t$  e se inoltre il moto è uniforme si ha  $T_0 = 0$ . Esistono poi particolari distribuzioni delle masse e particolari configurazioni per  $l$ , e quindi per  $l_0$ , per le quali è  $R_0 = 0$  ed altre per cui risulta  $R$  indipendente o da  $a_t$  o da  $a_n$ , non potendosi però verificare queste due circostanze contemporaneamente, salvo che  $l$  si riduca ad un punto, oppure il moto di  $P$  sia uniforme su  $l$ .

**2. Richiami geometrici e cinematici.** — Con riferimento ad una terna  $(0, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ , cartesiana, ortogonale, positiva, si può assumere il piano del moto quale piano  $z = 0$ . È però conveniente riferire i vettori del problema anche a due terne mobili, con le origini in  $P$  e  $P_0$  e precisamente alle due terne principali  $(P_0, \mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0)$  e  $(P, \mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  relative alle due linee  $l_0$  ed  $l$ .

Non si perde in generalità a supporre di aver fissato inizialmente la terna  $(0, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  ed il senso del moto, ad es. su  $l$ , in guisa che le tre terne considerate risultino congruenti. È poi manifesto che i tre versori  $\mathbf{k}, \mathbf{b}_0, \mathbf{b}$ , tutti normali al piano del moto, conserveranno o no lo stesso verso, secondo che durante il moto le coppie  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}), (\mathbf{t}, \mathbf{n}), (\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0)$  si manterranno o no congruenti tra loro.

Indicata con  $M = m + m_0$  la massa totale del sistema  $\Sigma$ , il centro di massa  $\Gamma$  di questo resta definito da una delle seguenti relazioni

$$M(\Gamma - P_0) = m(G - P_0), \quad M(\Gamma - G) = m_0(P_0 - G),$$

che, posto  $G - P = \xi t$ , con  $\xi < \lambda$  per l'ipotesi fatta, possono scriversi

$$(1) \quad M(\Gamma - P_0) = -m(\lambda - \xi)t, \quad M(\Gamma - G) = m_0(\lambda - \xi)t.$$

Si ha pure, posto  $m_0\lambda + m\xi = M\gamma$

$$(2) \quad \Gamma - P = \gamma t, \quad \text{con } \gamma < \lambda.$$

Per individuare la posizione di  $P_0$  e  $P$  su  $l_0$  ed  $l$  rispettivamente converrà introdurre, come parametri, gli archi  $s_0$  ed  $s$ , che misurano i cammini percorsi dai due punti contati positivamente nel senso di  $t_0$  e  $t$ , a partire dalle loro posizioni iniziali. Si avrà pertanto

$$(3) \quad \dot{P}_0 = \dot{s}_0 t_0, \quad \dot{P} = \dot{s} t, \quad \left[ \dot{P} = \frac{dP}{dt} \right].$$

Supposta assegnata la linea  $l$  ad es. mediante l'equazione intrinseca

$$\rho = \rho(s),$$

con  $\rho$  raggio di flessione di  $l$  in  $P$ , e l'equazione oraria per  $P$   $s = s(t)$ , con  $\rho(s)$  e  $s(t)$  simboli di funzioni assegnate dei loro argomenti, fissata la posizione iniziale di  $P_0 - P$ , resta determinata la linea  $l_0$ , descritta da  $P_0$  e la legge del moto di  $P_0$  su essa, mediante due equazioni analoghe alle precedenti  $\rho_0 = \rho_0(\lambda, s_0)$ ,  $s_0 = s_0[s(t)]$ , indicando  $\rho_0$  il raggio di flessione di  $l_0$  in  $P_0$ .

La relazione

$$(4) \quad P_0 - P = \lambda t,$$

che lega i due punti  $P_0$  e  $P$ , derivata rispetto al tempo, fornisce senz'altro le relazioni, che permettono di esprimere i versori di una delle coppie  $(t, n)$ ,  $(t_0, n_0)$ , come combinazioni di quelli dell'altra coppia e la notevole relazione

$$(5) \quad \frac{\dot{s}}{s_0} = t_0 \times t = \cos \varphi = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \lambda^2}},$$

dove manifestamente con  $\varphi$  si è indicato l'angolo formato dai versori  $t_0$  e  $t$ .

Come si è già accennato le velocità di rotazione  $\omega_0$  ed  $\omega$  di  $S_0$  ed  $S$  coincidono con quelle di  $t_0$  e  $t$  rispettivamente, esse possono quindi esprimersi con

$$(6) \quad \omega_0 = \omega_0 b_0 = \frac{\dot{s}_0}{\rho_0} b_0, \quad \omega = \omega b = \frac{\dot{s}}{\rho} b.$$

**3. Equazioni di moto.** — Come si è già detto agiscono sul sistema  $\Sigma$  le forze  $T_0 t_0 + N_0 n_0$  in  $Q_0$ , la reazione  $R_0$  in  $P_0$  e la reazione  $R$  in  $P$ .

Le equazioni cardinali della dinamica, insieme all'equazione del moto di rotazione di  $S_0$  attorno ad un asse normale al piano del moto e passante per  $P_0$ , ci forniscono le quattro equazioni scalari necessarie per la determinazione delle quattro incognite  $T_0$ ,  $N_0$ ,  $R$ ,  $R_0$ .

Indicato con  $I_0$  il momento di inerzia di  $S_0$  rispetto ad un asse passante per  $P_0$ , normale al piano del moto e posto  $Q_0 - P_0 = \lambda_0 t_0$ , l'equazione del moto di rotazione di  $S_0$

$$I_0 \dot{\omega}_0 = \lambda_0 N_0 b_0,$$

dà luogo, per le (6), all'unica equazione scalare

$$(7) \quad I_0 \dot{\omega}_0 = \lambda_0 N_0,$$

che esprime senz'altro l'incognita  $N_0$  in funzione dei dati.

Derivando due volte rispetto al tempo la (2), tenuto conto delle (3) e (6), si ottiene

$$(8) \quad \ddot{\Gamma} = (\ddot{s} - \gamma \omega^2) \mathbf{t} + (\omega s + \dot{\gamma} \omega) \mathbf{n}.$$

Dalla (4), derivata rispetto al tempo, sempre tenuto conto delle (3) e (6), si ha

$$(9) \quad \dot{s} \mathbf{t}_0 = \dot{s} \mathbf{t} + \lambda \omega \mathbf{n},$$

dalla quale, moltiplicando scalarmente per  $\mathbf{b}$ ,

$$(10) \quad \dot{s} \mathbf{n}_0 = \pm (\dot{s} \mathbf{n} - \lambda \omega \dot{t}),$$

valendo il segno superiore o l'inferiore secondo che è  $\mathbf{b}_0 \times \mathbf{b} \geq 0$ . L'equazione del moto del centro di massa

$$M \ddot{\Gamma} = T_0 \mathbf{t}_0 + (R_0 + N_0) \mathbf{n}_0 + R \mathbf{n},$$

con riferimento alla terna  $(P, \mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ , tenuto conto delle (8), (9), (10), assume pertanto la forma

$$(11) \quad M(\ddot{s} - \gamma \omega^2) \mathbf{t} + M(\omega \dot{s} + \dot{\gamma} \omega) \mathbf{n} = \frac{1}{s_0} \{ \dot{s} T_0 \mp (R_0 + N_0) \lambda \omega \} \mathbf{t} + \\ + \frac{1}{s_0} \{ \lambda \omega T_0 \pm (R_0 + N_0) \dot{s} + s_0 R \} \mathbf{n},$$

nella quale ricordiamo che a  $R_0 + N_0$  va attribuito dei due segni il superiore o l'inferiore secondo che è  $\mathbf{b}_0 \times \mathbf{b} \geq 0$ .

Per scrivere la seconda delle equazioni cardinali occorre valutare l'espressione del momento delle quantità di moto  $\mathbf{K}$  del sistema  $\Sigma$  rispetto a  $\Gamma$ . Indicando con  $I$  il momento di inerzia di  $S$  rispetto ad un asse passante per  $\Gamma$  e normale al piano del moto, si ha evidentemente

$$\mathbf{K} = I \boldsymbol{\omega} + I_0 \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega} (\Gamma - P_0) \times m(G - \Gamma),$$

che, per le (1) e (6), diviene

$$\mathbf{K} = \{ I + m(\lambda - \gamma)(\lambda - \xi) \} \omega \mathbf{b} + I_0 \omega_0 \mathbf{b}_0.$$

La seconda delle equazioni cardinali può quindi scriversi

$$\begin{aligned} & \{ I + m(\lambda - \gamma)(\lambda - \xi) \} \dot{\omega} \mathbf{b} + I_0 \dot{\omega}_0 \mathbf{b}_0 = \\ & = (P_0 - \Gamma) \wedge \{ T_0 \mathbf{t}_0 + (R_0 + N_0) \mathbf{n}_0 \} + (P - \Gamma \wedge R \mathbf{n} + (Q_0 - P_0) \wedge N_0 \mathbf{n}_0). \end{aligned}$$

Questa, posto  $m(\lambda - \gamma)(\lambda - \xi) = M\delta^2$ , tenuto conto delle (2), (7), (9) e (10), dà luogo all'unica equazione scalare

$$(12) \quad (I + M\delta^2) \dot{\omega} = \frac{\lambda - \gamma}{s_0} \{ \lambda \omega T_0 \pm (R_0 + N_0) \dot{s} \} - \gamma R.$$

Le (7), (11) e (12) costituiscono il sistema cui devono soddisfare le incognite del problema.

#### 4. Espressione delle forze caratteristiche del problema. —

Uguagliando nei due membri di (11) le componenti omologhe e associando alle equazioni ottenute la (12), si ottiene il sistema di tre equazioni scalari

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \dot{s} T_0 \mp \lambda \omega (R_0 + N_0) &= M \dot{s}_0 (\ddot{s} - \gamma \omega^2), \\ \lambda \omega T_0 \pm \dot{s} (R_0 + N_0) + \dot{s}_0 R &= M \dot{s}_0 (\omega \dot{s} + \gamma \dot{\omega}), \\ (\lambda - \gamma) \lambda \omega T_0 \pm (\lambda - \gamma) \dot{s} (R_0 + N_0) - \gamma \dot{s}_0 R &= (I + M\delta^2) \dot{s} \dot{\omega}. \end{aligned} \right.$$

che ricordata la (7) permette di determinare  $T_0$ ,  $R_0$ ,  $R$  in funzione dei dati geometrici e cinematici. Si ottiene pertanto, essendo  $\dot{s}_0^2 = \dot{s}^2 + \lambda^2 \omega^2$ ,

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{s}_0 T_0 &= M \dot{s} \ddot{s} + \{ I + M(\delta^2 + \gamma^2) \} \omega \dot{\omega}, \\ \pm \lambda \dot{s}_0 (R_0 + N_0) &= M(\lambda^2 \gamma \omega^2 + \gamma \omega \dot{s}^2 - \lambda^2 \omega \ddot{s}) + \{ I + M(\delta^2 + \gamma^2) \} \dot{s} \dot{\omega}, \\ \lambda R &= M(\lambda - \gamma) \dot{s} \dot{\omega} + \{ M \lambda \gamma - [I + M(\delta^2 + \gamma^2)] \} \dot{\omega}. \end{aligned} \right.$$

Queste, essendo  $\dot{\omega} = \frac{\ddot{s}}{\rho} - \frac{\dot{s}^2}{\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{ds} = \frac{1}{\rho} \left\{ a_t - a_n \frac{d\rho}{ds} \right\}$ , ricordando la (5) e indicando con  $p$  ed  $\eta$  due lunghezze positive tali che

$$Mp(\lambda - \gamma) = I + M\delta^2 \quad \text{e} \quad \eta^2 = p(\lambda - \gamma) + \gamma^2,$$

possono assumere la forma

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} T_0 &= \frac{M \cos \varphi}{\rho^2} \left\{ (\rho^2 + \eta^2) a_t - \eta^2 \frac{d\rho}{ds} a_n \right\}, \\ \pm (R_0 + N_0) &= \frac{M \cos \varphi}{\lambda \rho^2} \left\{ \rho(\eta^2 - \lambda^2) a_t + \left( \gamma \lambda^2 + \gamma \rho^2 - \rho \eta^2 \frac{d\rho}{ds} \right) a_n \right\}, \\ R &= \frac{M(\lambda - \gamma)}{\rho \lambda} \left\{ (\gamma - p) a_t + \left[ \rho - (\gamma - p) \frac{d\rho}{ds} \right] a_n \right\}, \end{aligned} \right.$$

dove ricordiamo  $R_0 + N_0$  va preso col suo segno o col segno opposto secondo che è  $\mathbf{b}_0 \times \mathbf{b} \geq 0$ .

**5. Casi particolari.** — Le (14) mettono in evidenza il fatto che  $T_0$ ,  $R_0 + N_0$ ,  $R$  sono espresse mediante combinazioni lineari omogenee di  $a_t$  e di  $a_n$  i cui coefficienti, come è manifesto, dipendono dalle costanti geometriche e materiali del sistema  $\Sigma$  oltre che dal raggio di flessione di  $l$  e sua derivata rispetto ad  $s$ .

Ci si può adesso domandare se esistono particolari distribuzioni delle masse del sistema  $\Sigma$  o particolari linee  $l$ , per le quali le espressioni delle forze del problema restino notevolmente semplificate o addirittura alcune di esse si annullino, qualunque sia il moto assegnato per  $P$  su  $l$ .

Se pensiamo di far muovere  $P_0$  su di una guida scavata sul piano del moto, possiamo assumere  $N_0 = 0$ . Infatti in tal caso la guida  $l_0$  reagirà su  $S_0$ , oltre che con la reazione  $R_0$ , con un momento  $\mathfrak{N}_0$ , normale al piano del moto, e tale da mantenere  $\mathbf{t}_0$  tangente a  $l_0$ .

a) Escludiamo dapprima che la linea  $l$  si riduca ad un punto. In tal caso infatti, essendo identicamente  $\varphi = 0$  e  $\cos \varphi = 0$ , le (14) assumono una forma indeterminata.

È subito visto che, nel caso banale che  $l$  sia una retta, con che anche  $l_0$  è una retta, si ha  $T_0 = Ma_t$ ,  $R_0 = R = 0$ ,  $\mathfrak{N}_0 = 0$ ; si ha pertanto che la trazione  $T_0$  risulta proporzionale ad  $a_t$ . Quest'ultima circostanza si verifica anche se  $l$  è una circonferenza, il che implica che anche  $l_0$  è una circonferenza. Infatti, essendo in tal

caso  $\frac{d\varphi}{ds} = 0$ , si annulla identicamente il coefficiente di  $a_n$  nell'es-

pressione di  $T_0$ . Se poi il moto di  $P$  è uniforme su  $l$ , allora è  $T_0 = 0$ , tanto che  $l$  sia una retta, quanto che sia una circonferenza: mentre però nel primo caso si annullano anche le altre

forze, nel secondo si ha  $\mathfrak{N}_0 = 0$ ,  $R_0 = \frac{\gamma}{\lambda} Mr_0 \omega^2$ ,  $R = \frac{M}{\lambda} (\lambda - \gamma) r \omega^2$ , essendo  $r$  ed  $r_0$  i raggi di  $l$  e di  $l_0$  rispettivamente.

Si noti che in questo caso il moto del sistema  $\Sigma$  è una rotazione d'insieme intorno al centro comune di  $l$  e  $l_0$  e che i risultati trovati si potrebbero dedurre direttamente.

Se  $\varphi$  non è costante è subito visto che, se la distribuzione delle masse di  $S$  è tale che si ha  $I = 2M\gamma(\lambda - \gamma)$ , con che  $\lambda = \gamma$ , e  $\rho(s)$  soddisfa l'equazione differenziale  $\gamma^2 \rho \frac{d\varphi}{ds} = \gamma \rho^2 + \gamma \lambda^2$ , qualunque sia il moto di  $P$  su  $l$ , è  $R_0 = 0$ .

Le linee  $l$ , i cui raggi di flessione soddisfano l'equazione diffe-

renziale precedente, appartengono manifestamente alla famiglia di pseudo-trattrici <sup>(2)</sup>, definite dall'equazione intrinseca

$$\rho = \lambda \sqrt{e^{\frac{2\gamma(s+s_0)}{r^2}} - 1}, \quad \text{con } s_0 \text{ costante arbitraria.}$$

Per avere  $R=0$ , qualunque sia il moto di  $P$  su  $l$ , occorre che siano verificate contemporaneamente le due condizioni

$$p = \gamma \quad \text{e} \quad \rho = (p - \gamma) \frac{d\rho}{ds}.$$

È manifesto che queste non possono essere verificate simultaneamente, a meno che non sia  $\rho=0$ , cosa che per ora abbiamo esclusa.

Se è  $p = \gamma$ , il che implica una particolare distribuzione delle masse di  $\Sigma$ , si ha  $R = \frac{M(\lambda - \gamma)}{\lambda} a_n$ , cioè  $R$  risulta indipendente da  $a_t$ .

Supposto  $p \neq \gamma$  si ha invece  $R$  indipendente da  $a_n$ , qualora  $l$  appartenga alla famiglia di linee, rappresentata dall'equazione intrinseca <sup>(3)</sup>

$$\rho = a_0 e^{\frac{s}{\gamma - p}},$$

con  $a_0$  costante arbitraria, soddisfacenti l'equazione differenziale

$$\rho = (p - \gamma) \frac{d\rho}{ds}.$$

b) Si abbia adesso  $\rho$  identicamente nullo, con che  $l$  si riduce ad un punto;  $P_0$  in tal caso descrive manifestamente la circonferenza  $l_0$  di raggio  $\lambda$ . L'indeterminazione delle (14) può togliersi valutando i secondi membri di queste nell'ipotesi che  $l$  sia la circonferenza di raggio  $r$ , con che  $l_0$  è la circonferenza di raggio  $r_0 = \sqrt{r^2 + \lambda^2}$ , e poi passando al limite sui valori trovati per  $r \rightarrow 0$ . Con questo procedimento resta anche determinato il versore  $n$ , normale in  $P$  al vettore  $P - P_0$ .

Si ha manifestamente  $a_t = \ddot{s} = \dot{\omega}r$ ,  $a_n = \omega^2 r$ ,  $\cos \varphi = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \lambda^2}}$ , con che

$$T_0 = \frac{M}{\sqrt{r^2 + \lambda^2}} (r^2 + \lambda^2) \dot{\omega}, \quad R_0 = \frac{M}{\lambda \sqrt{r^2 + \lambda^2}} \{ r(\dot{\omega}^2 - \lambda^2) \dot{\omega} + (\gamma \lambda^2 + \gamma r^2) \omega^2 \},$$

$$R = \frac{M(\lambda - \gamma)}{\lambda} \{ (\gamma - p) \dot{\omega} + r \omega^2 \}.$$

<sup>(2)</sup> Cfr. CESARO, *Lezioni di geometria intrinseca*, p. 18 (Napoli, 1896).

<sup>(3)</sup> Cfr. CESARO, loc. cit., p. 14.

Da queste si ha subito.

$$\lim_{r \rightarrow 0} T_0 = \frac{M\gamma^2}{\lambda} \omega, \quad \lim_{r \rightarrow 0} R_0 = M\gamma\omega^2, \quad \lim_{r \rightarrow 0} R = \frac{M(\lambda - \gamma)(\gamma - p)}{\lambda} \omega.$$

Queste mostrano che se il moto di  $P$  è uniforme, con che  $\dot{\omega} = 0$ , si ha, come doveva essere  $T_0 = 0$ ,  $R = 0$  e  $R$  costante. Se poi è  $\gamma = p$  allora è  $R = 0$  qualunque sia il moto di  $P_0$  su  $l_0$ . Questi risultati pongono in evidenza il fatto che in questi due casi il perno in  $P$ , attorno a cui ruota il vettore  $P_0 - P$ , non interviene affatto, bastando le forze agenti in  $P_0$  a mantenere fisso il punto  $P$ .

La rotazione di assieme di  $\Sigma$  intorno a  $P$ , ora considerata come caso limite, può studiarsi anche direttamente. In tal caso però, ammesso che tanto  $l_0$ , come il punto  $P$  in cui viene a contrarsi  $l$  possano reagire, la reazione  $R_0$  calcolata sopra può comunque essere ripartita tra  $P_0$  e  $P$ , per cui — da questo punto di vista — il problema risulterebbe indeterminato.

c) Supponiamo di mettere in moto il sistema  $\Sigma$ , in modo che i due punti  $P_0$  e  $P$  siano costretti a seguire le due guide  $l_0$  ed  $l$ , preventivamente scalfite sul piano del moto, e quindi di abbandonarlo a se stesso.  $\Sigma$  si muove pertanto di moto spontaneo e su di esso agiscono le sole forze esercitate dalle guide  $l_0$  ed  $l$ . Dovendo aversi  $T_0 = 0$ , ne segue la relazione tra  $a_t$  ed  $a_n$

$$a_t = \frac{\gamma^2}{\rho^2 + \gamma^2} \frac{d\rho}{ds} a_n$$

che, sostituita nelle espressioni di  $R_0$  ed  $R$ , fornisce

$$\pm R_0 = \frac{M \cos^2 \varphi}{\lambda} \left[ \gamma - \frac{\rho\gamma^2}{\rho^2 + \gamma^2} \frac{d\rho}{ds} \right] a_n, \quad R = \frac{M(\lambda - \gamma)}{\lambda} \left[ 1 - \frac{(\gamma - p)\rho}{\rho^2 + \gamma^2} \frac{d\rho}{ds} \right] a_n.$$

Queste determinano le reazioni esercitate da  $l_0$  ed  $l$ , nel caso del moto spontaneo.

Anche in questo caso ci si può domandare se, escluso il caso banale di  $l$  rettilinea, esistano particolari configurazioni per  $l$ , e quindi per  $l_0$ , per le quali sia  $R = 0$  oppure  $R_0 = 0$ . Ancor qui, per soddisfare a queste condizioni, si è condotti (mi limito ad accennarlo) a curve analoghe alle pseudotrattrici già considerate (cfr. 5-a), con l'avvertenza che, perchè sia  $R = 0$ , è necessario inoltre che la distribuzione delle masse di  $\Sigma$  sia tale, da non aversi  $\gamma = p$ , poichè, in caso contrario, è sempre  $R \neq 0$ , qualunque sia la linea  $l$ .