
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ARMANDO CHIPELLINI

Sull'integrazione dell'equazione differenziale $Y^{(n)} + P_n(x)Y = 0$

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
2, Vol. 1 (1939), n.5, p. 426-434.*

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_5_426_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Sull'integrazione dell'equazione differenziale

$$Y^{(n)} + P_n(x)Y = 0.$$

Nota di ARMANDO CHIPELLINI (a Cagliari).

Sunto. - Si determina la condizione necessaria e sufficiente affinché l'equazione differenziale lineare $y^{(n)} + p_n(x)y = 0$, sia integrabile per quadrature; il che si ottiene immediatamente per mezzo della teoria degli invarianti differenziali lineari. Inoltre si mette in evidenza il diverso comportamento funzionale di questa equazione, a seconda che l'ordine n è due oppure tre oppure è maggiore di tre.

1. Il signor BESGE, nel « Journal de Liouville » (I serie, t. IX, pag. 336) integra per quadrature l'equazione

$$(1) \quad y'' = \frac{Ay}{(x - \alpha)^2(x - \beta)^2}; \quad (A = \text{costante})$$

L'HALPHEN, in una sua prima memoria, studia direttamente l'equazione del 3° ordine, immediata generalizzazione della precedente (1)

$$(2) \quad y''' = \frac{Ay}{(x - \alpha)^2(x - \beta)^3}$$

e successivamente l'equazione

$$(3) \quad y^{(n)} = \frac{Ay}{(x - \alpha)^n(x - \beta)^n}$$

e per la (2) imposta la quistione da un punto di vista più generale, esaminando l'equazione

$$y''' + p_3(x)y = 0$$

e andando a stabilire la condizione necessaria e sufficiente affinché questa sia trasformabile in un'altra a coefficienti costanti (2); per la (3)

(1) Vedi HALPHEN, *Oeuvres* (tomo III: *Sur la réduction des équations linéaires aux formes intégrables*, pagg. 126-128).

(2) Vedi HALPHEN, *Oeuvres* (tomo II: *Sur une classe d'équations différentielles linéaires*, pagg. 467-470).

invece non affronta tale ricerca, contentandosi di verificare come effettivamente essa sia riducibile ad una a coefficienti costanti, con un procedimento assai elegante ma quanto mai artificioso e indiretto. In entrambi i casi poi la ricerca è strettamente legata al caso particolare preso in esame (e quindi non generalizzabile) e non mostra affatto il perchè intimo della circostanza stabilita, cioè della riduzione ad un'equazione a coefficienti costanti; e ciò perchè, pur avendo trattato ampiamente, nella memoria citata a nota (1), e in altre memorie, la teoria degli invarianti differenziali, non aveva osservato l'efficacia pratica di tale teoria, la quale appunto perciò (oltre a difficoltà di ordine pratico) era stata dopo di Lui, quasi completamente abbandonata.

Scopo di questo lavoretto è precisamente quello di mostrare, attraverso lo studio completo dell'equazione

$$y^{(n)} + p_{(n)}(x)y = 0$$

[come ho già fatto in un altro mio lavoro per un altro tipo di equazioni (2) e come avevo già da tempo previsto (4)], come mediante la teoria degli invarianti differenziali lineari si possa, in maniera del tutto naturale, risolvere tale questione.

Ed inoltre vedremo come per $n = 2$, la riduzione ad un'equazione a coefficienti costanti sia sempre possibile, qualunque sia l'equazione differenziale lineare ed omogenea da cui si parte; ed anzi come tale riduzione dipenda da una funzione arbitraria (5). Nel caso di $n = 3$ invece vedremo come tale riduzione venga a dipendere da una costante arbitraria e come scegliendola opportunamente si ottenga il caso dell'HALPHEN; nel caso infine di $n \geq 4$ tale riduzione non sarà possibile che in un sol modo. In questo diverso comportamento funzionale dell'equazione $y^{(n)} + p_{(n)}(x)y = 0$ consiste appunto l'interesse della ricerca, più che nella generalizzazione dell'equazione $y'' + p_2(x)y = 0$ trattata originariamente dal BESGE.

Voglio osservare infine come l'equazione studiata in questa nota venga a presentare un particolare interesse rispetto ai risultati geometrici che il BOMPIANI ha recentemente stabilito sopra le

(3) Vedi CHIELLINI, *Sulle pseudo-equazioni di Fuchs e sull'integrazione dell'equazione di Riccati* (« Ren. Seminario Facoltà Scienze », Cagliari 1939, fasc. 3).

(4) Vedi CHIELLINI, *Equazioni differenziali lineari e invarianti differenziali lineari*, (Litografie. Scuola di Mat. R. Università di Cagliari, cap. IV).

(5) Una scelta conveniente di questa funzione, come vedremo, darà luogo al caso trattato dal BESGE.

equazioni differenziali lineari, circa la riduzione alla forma di LAGUERRE-FORSYTH e il significato geometrico della normalizzazione delle coordinate; ma su tale argomento spero di poter tornare (e con maggior ampiezza) in un successivo lavoro (6).

2. Premesso ciò consideriamo l'equazione

$$y'' + p_2(x)y = 0$$

ed eseguiamo su di essa la trasformazione

$$y = \lambda(x)z(\xi), \quad \xi = \xi(x);$$

la trasformata risulta

$$z'' + \frac{2\lambda\xi' + \lambda\xi''}{\lambda\xi'^2} z' + \frac{\lambda'' + p_2\lambda}{\lambda\xi'^2} z = 0$$

e volendo che sia a coefficienti costanti dovrà aversi

$$(4) \quad 2\lambda\xi' + \lambda\xi'' = k\lambda\xi'^2, \quad \lambda'' + p_2\lambda = h\lambda\xi'^2$$

con h, k costanti arbitrarie; derivando la prima delle (4) e sostituendo nella seconda, otteniamo

$$(5) \quad \frac{1}{4} \left(k\xi' - \frac{\xi''}{\xi'} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(k\xi'' - \frac{\xi'''}{\xi'} + \frac{\xi''^2}{\xi'^2} \right) = h\xi'^2 - p_2,$$

che risulta essere un'equazione del 2° ordine nell'incognita $\Theta = \xi'$, una volta data p_2 . Preso un integrale qualunque di essa e determinato poi λ dalla prima delle (4), secondo l'espressione

$$\lambda = ce^{\frac{1}{2} \int \left(k\Theta - \frac{\Theta'}{\Theta} \right) dx} = \frac{ce^{\frac{k}{2} \int \Theta dx}}{\sqrt{\Theta}}, \quad (c = \text{costante})$$

l'equazione data si trasforma in una a coefficienti costanti, qualunque sia p_2 .

Se poi facciamo $k = 0$, in analogia al procedimento che si tiene in generale nella teoria degli invarianti differenziali lineari (7), risulta

$$\frac{\xi''}{\xi'} = -2 \frac{\lambda'}{\lambda},$$

(6) Vedi BOMPIANI, *Sulla normalizzazione delle equazioni differenziali lineari* (« Rend. Acc. Lincei », vol. 23, pag. 807, 1936); *Sur la normalisation des équations différentielles linéaires* (« Bull. Acad. de Roumanie », vol. 18, pag. 64, 1936); *Forme normali delle equazioni differenziali lineari e loro significato geometrico* (« Ann. Scient. de l'Université de Jassy », vol. 23, pag. 75, 1937).

(7) Vedi CHELLINI, *Sull'integrazione delle equazioni differenziali lineari di ordine qualunque*. (« Ren. Seminario Facoltà Scienze », Cagliari 1939, fasc. I).

da cui integrando $\xi\lambda^2 = C$, con C costante arbitraria, e sostituendo nella seconda delle (4)

$$(6) \quad p_2 = \frac{-\lambda''}{\lambda} + \frac{hC^2}{\lambda^4},$$

mentre la (5) diventa $\frac{3}{4}\left(\frac{\xi'''}{\xi'}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\xi''''}{\xi'}\right) + p_2 - h\xi'^2 = 0$, da cui derivando, per eliminare la costante h :

$$\frac{6\xi''\xi''''}{\xi'^2} - 6\left(\frac{\xi'''}{\xi'}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{\xi''''}{\xi'}\right) + 2p_2' - 4p_2\left(\frac{\xi''}{\xi'}\right) = 0,$$

o anche, introducendo la così detta *funzione trasformatrice*

$$\eta = \frac{\xi''}{\xi'} = -\frac{2\lambda'}{\lambda};$$

$$(7) \quad \eta^3 - 3\eta\eta' + \eta'' + 4p_2'\eta - 2p_2'\eta = 0.$$

Preso un integrale η qualunque di essa, una volta dato p_2 , si determinano λ e ξ con le formule

$$\lambda = c_1 e^{-\frac{1}{2}\int\eta dx}, \quad \xi = c_2 \int e^{\int\eta dx} dx + c_3, \quad (c_i = \text{costanti})$$

e l'equazione data si trasforma in un'altra a coefficienti costanti.

Facciamo per esempio il caso *particolarissimo* in cui η e p_2 siano tali da soddisfare al sistema

$$(a) \quad \eta^3 - 3\eta\eta' + \eta'' = 0, \quad (b) \quad p_2' - 2p_2\eta = 0;$$

ponendo $Y = e^{-\int\eta dx}$, la (a) si trasforma in $Y''' = 0$, cioè $Y = mx^2 + px + q$ con m, p, q costanti arbitrarie; dopo di che risulta $\eta = \frac{-(2mx + p)}{mx^2 + px + q}$ ed infine

$$p_2 = \frac{A}{(mx^2 + px + q)^2},$$

che è il risultato di BESGE.

Questa analisi ci fa poi vedere come viceversa, qualunque sia λ , la (6) fornisca (8) una p_2 , per cui l'equazione data si riduce ad un'altra a coefficienti costanti.

ESEMPIO: sia $\lambda'' = 0$ cioè $\lambda = \alpha x + \beta$; risulta senz'altro

$$p_2 = \frac{A}{(\alpha x + \beta)^4};$$

(8) O ciò che è lo stesso, la (7), qualunque sia η , ch  la (4) pu  considerarsi, in certo qual modo, un integrale primo della (7).

sia $\lambda'' = 2m$ cioè $\lambda = mx^2 + px + q$; risulta

$$p_2 = \frac{A}{(mx^2 + px + q)^4} - \frac{2m}{mx^2 + px + q};$$

sia infine $\lambda^2 = mx^2 + px + q$; risulta

$$p_2 = \frac{A}{(mx^2 + px + q)^2},$$

che è il caso di BESGE.

3. Supponiamo ora che sia $n = 3$, cioè consideriamo l'equazione

$$y''' + p_3(x)y = 0;$$

mediante la solita trasformazione $y = \lambda(x)z(\xi)$, $\xi = \xi(x)$, otteniamo la trasformata

$$z''' + \frac{3(\lambda'\xi' + \lambda\xi'')}{\lambda\xi'^2} z'' + \frac{3\lambda''\xi' + 3\lambda'\xi'' + \lambda\xi'''}{\lambda\xi'^3} z' + \frac{\lambda''' + p_3\lambda}{\lambda\xi'^3} z = 0,$$

e quindi dovremo porre

$$\lambda\xi' + \lambda\xi'' = k\lambda\xi'^2, \quad 3\lambda''\xi' + 3\lambda'\xi'' + \lambda\xi''' = h\lambda\xi'^3, \quad \lambda''' + p_3\lambda = l\lambda\xi'^3,$$

con h, k, l costanti arbitrarie. Troviamo così tre equazioni in λ, ξ, p_3 ; ne segue che per ogni coppia di funzioni $\lambda, \Theta = \xi'$ soddisfacenti alle prime due, troveremo una $p_3 = l\Theta^3 - \frac{\lambda'''}{\lambda}$ tale che la trasformata di $y''' + p_3 y = 0$ risulta a coefficienti costanti. Se invece la funzione p_3 è precedentemente data, il problema di ridurre l'equazione proposta in un'altra a coefficienti costanti, non sarà più possibile in generale, occorrendo che λ, ξ siano legate dalla relazione $\lambda''' + p_3\lambda = l\lambda\xi'^3$; e ciò è ben naturale, in quanto non tutte le equazioni differenziali lineari ed omogenee sono tra loro equivalenti, non appena l'ordine n risulta maggiore o uguale a 3.

Supponendoci al solito in particolare la costante $k = 0$, il che porta alla relazione $\frac{\lambda'}{\lambda} + \frac{\xi''}{\xi'} = 0$ cioè $\lambda\xi' = a$ (con a costante arbitraria d'integrazione) e alla funzione trasformatrice $\eta = \frac{\xi''}{\xi'} = -\frac{\lambda'}{\lambda}$, la trasformata assume la forma

$$z''' + q_2 z' + q_3 z = 0,$$

e quindi ad essa si possono senz'altro applicare i risultati generali stabiliti circa la riduzione di un'equazione lineare in un'altra

a coefficienti costanti e cioè che il suo invariante differenziale assoluto

$$(8) \quad J = \frac{\Theta_{31}^3}{\Theta_3^8} \quad (9)$$

sia costante; poichè nel nostro caso è

$$\Theta_3 = p_3, \quad \Theta_{31} = 6\Theta_3\Theta_3'' - 7\Theta_3'^2,$$

derivando logicamente la (8) risulta la condizione

$$(8_1) \quad \frac{9p_3'''}{p_3} + \frac{28p_3'^2}{p_3^3} - \frac{36p_3'p_3''}{p_3^2} = 0,$$

mentre la funzione trasformatrice è definita da $\eta = \frac{p_3'}{3p_3}$.

Si ponga $\frac{p_3'}{p_3} = -3t$; la (8₁) si trasforma in

$$(8_2) \quad t'' + 3tt' + t^3 = 0$$

la cui integrazione, come si è visto precedentemente, ci dà senz'altro

$$t = \frac{2mx + p}{mx^2 + px + q}$$

e quindi

$$\eta = \frac{-(2mx + p)}{mx^2 + px + q}, \quad p_3 = \frac{A}{(mx^2 + px + q)^3}$$

con A costante arbitraria. Si ha con ciò il risultato più generale di quello di HALPHEN (in quanto le costanti A, m, p, q risultano essere del tutto arbitrarie): *L'integrazione dell'equazione $y''' + p_3(x)y = 0$ è riconducibile a quella di un'equazione a coefficienti costanti, purchè p_3 sia della forma $p_3 = \frac{A}{(mx^2 + px + q)^3}$ e la funzione trasfor-*

matrice è data da $\eta = \frac{-(2mx + p)}{mx^2 + px + q}$.

OSSERVAZIONE. — Tale risultato si può stabilire anche direttamente, in maniera semplicissima, nel modo seguente: supposto $k=0$, risulta $\lambda z' = a$ cioè $\lambda\Theta = a$, dopo di che avremo

$$\begin{cases} y'(x) = az' + \lambda z, & y''(x) = a\Theta z' + \lambda'\Theta z + \lambda''z, \\ y'''(x) = a\Theta^2 z''' + (a\Theta' + \lambda'\Theta^2)z'' + (2\lambda''\Theta + \lambda'\Theta')z' + \lambda'''z; \end{cases}$$

ma $\lambda\Theta' + \lambda'\Theta = 0$ da cui moltiplicando per Θ , $a\Theta + \lambda'\Theta^2 = 0$ ed allora la trasformata di $y''' + p_3y = 0$ diventa

$$a\Theta^2 z''' + (2\lambda''\Theta + \lambda'\Theta')z' + (\lambda''' + p_3\lambda)z = 0,$$

(9) Per le notazioni, ormai classiche, vedi per es. SCHLESINGER, *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen*. (t. 2, pag. 191 e segg.).

ma $\frac{2\lambda''\Theta + \lambda'\Theta'}{a\Theta^2} = \frac{1}{a} \left(\frac{2\lambda''}{\Theta} + \frac{\lambda'\Theta'}{\Theta^2} \right) = \frac{1}{a^2} (2\lambda\lambda'' - \lambda'^2)$ e quindi affinché sia costante occorre che sia $\lambda''' = 0$; dopo di che abbiamo per la trasformata

$$z'' + hz' + \frac{p_3}{\Theta^3} z = 0, \quad (h = \text{costante})$$

e quindi dovrà aversi, indicando con A, m, p, q costanti arbitrarie

$$p_3 = \frac{A}{(mx^2 + px + q)^3}.$$

4. Procedendo analogamente, per es. nel caso di $n = 4$, troveremo per λ, ξ' tre equazioni differenziali, tra loro in generale indipendenti, e quindi incompatibili tra loro, se lasciamo p_4 del tutto arbitrario, a meno che non sia nulla la costante k , nel qual caso potremo applicare la teoria degli invarianti differenziali, come si è fatto per $n = 3$. Resta così confermato ciò che si era affermato al n.º 1 e cioè come il problema di integrare l'equazione $y^{(n)} + p_n y = 0$ sia differente secondo che è $n = 2, 3$, oppure $n > 3$.

Dopo ciò veniamo infine a considerare in generale l'equazione

$$(9) \quad y'' + p_n(x)y = 0,$$

con n qualunque, maggiore o uguale a 4; tenendo presente la forma esplicita degli invarianti differenziali lineari ⁽¹⁰⁾ segue che per la (9) sono nulli tutti gli invarianti differenziali fondamentali, eccetto Θ_n che risulta essere p_n . Ne segue che la condizione necessaria e sufficiente perchè la (9) sia riducibile ad una a coefficienti costanti è data da

$$(10) \quad \frac{\Theta_{n1}'}{2(n+1)\Theta_{n1}} = \frac{\Theta_n'}{n\Theta_n}$$

dove si ha in questo caso

$$(11) \quad \Theta_{n1} = 2n\Theta_n\Theta_n'' - (2n+1)\Theta_n'^2,$$

mentre la funzione trasformatrice risulta poi esser data da

$$\tau = \frac{\Theta_n'}{n\Theta_n} \quad (11).$$

⁽¹⁰⁾ Vedi MONTALDO, *La forma esplicita degli invarianti fondamentali*.
(* Rend. Sem. Facoltà Scienze », Cagliari 1938, fasc. IV). CHIELLINI, l. c. a nota ⁽⁴⁾ e a nota ⁽⁷⁾; SCHLESINGER l. c.

⁽¹¹⁾ Vedi Memoria citata a nota ⁽⁷⁾.

Introducendo la (11) in (10), risulta l'equazione di condizione

$$\frac{n^2 \Theta_n'''}{\Theta_n} + \frac{(n+1)(2n+1)\Theta_n''}{\Theta_n^2} - \frac{3n(n+1)\Theta_n'\Theta_n''}{\Theta_n^3} = 0$$

che mediante la posizione

$$\frac{\Theta_n'}{\Theta_n} = nt,$$

si trasforma in $t'' + 3tt' + t^3 = 0$, cioè analoga alla (a). Ne segue senz'altro

$$\gamma = \frac{-(2mx+p)}{mx^2+px+q}, \quad p_n = \frac{A}{(mx^2+px+q)^n}$$

con A, m, p, q , costanti arbitrarie e quindi il risultato, che comprende il caso di HALPHEN: *L'integrazione dell'equazione*

$$y^{(n)} + p_n(x)y = 0$$

è riducibile a quella di un'equazione a coefficienti costanti, purchè p_n sia della forma

$$p_n = \frac{A}{(mx^2+px+q)^n};$$

e la funzione trasformatrice è data da

$$(12) \quad \gamma = \frac{-(2mx+p)}{mx^2+px+q}.$$

È interessante osservare come dal punto di vista analitico si richiedano gli identici calcoli per ricondurre ad un'equazione a coefficienti costanti la equazione $y^{(n)} + p_n(x)y = 0$ oppure la più semplice $y''' + p_3(x)y = 0$; ma una breve riflessione ci convince subito della ragionevolezza della cosa, in quanto che le condizioni affinché la (9) sia riconducibile ad una a coefficienti costanti sono tutte soddisfatte (per $n \geq 4$), eccetto una, e cioè che l'unico invariante differenziale diverso da zero

$$J = \frac{\Theta_n^{(n)}}{\Theta_n^{2n+2}},$$

sia costante, e questa condizione, come risulta dal calcolo precedente, è identica a quella espressa dalla (8).

5. È infine opportuno esaminare il caso in cui il trinomio $mx^2 + px + q$ abbia nullo il suo discriminante Δ ; in tal caso a causa della (12) abbiamo

$$\gamma^2 - 2\gamma' = \frac{-\Delta}{(mx^2+px+q)^2} = 0$$

da cui si deduce che i primi coefficienti dell'equazione trasformata ⁽¹²⁾ e cioè

$$\begin{cases} -2(n+1)\eta' + (n+1)\eta^2 \\ -(n+1)\eta'' + 3(n+1)\eta\eta' - (n+1)\eta^3 \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

risultano nulli. Se ne deduce allora che saranno tutti nulli, eccetto l'ultimo; infatti in questo caso la trasformata della (9) risulta del tipo

$$z^{(n)}(\xi) + \binom{n}{2} q_2 z^{(n-2)}(\xi) + \dots = 0$$

cioè della forma ridotta di LAGUERRE-FORSYTH e quindi per i suoi coefficienti avremo ⁽¹³⁾

$$\begin{cases} q_3 = \Theta_3, & q_4 = \Theta_4 + f_4(\Theta_3), & q_5 = \Theta_5 + f_5(\Theta_3, \Theta_4) \\ \dots\dots\dots \\ q_{n-1} = \Theta_{n-1} + f_{n-1}(\Theta_3, \Theta_4, \dots, \Theta_{n-2}) \\ q_n = \Theta_n + f_n(\Theta_3, \Theta_4, \dots, \Theta_{n-1}) \end{cases}$$

con le f_i funzioni omogenee dei loro argomenti; da cui segue l'asserto. La trasformata sarà perciò della forma

$$z^{(n)}(\xi) + \frac{\Theta_n}{\xi^n} z(\xi) = 0$$

che si verifica direttamente risultare a coefficienti costanti, perchè da $\eta = \frac{\xi''}{\xi'} = \frac{\Theta_n'}{n\Theta_n}$, segue $\xi' = k \sqrt[n]{\Theta_n(x)}$.

Questa circostanza, rispetto alla teoria generale degli invarianti differenziali è caratterizzata, rispetto all'equazione generale precedente, dall'essere nulla la quadriderivata

$$\Theta_{n1} = 2n\Theta_n\Theta_n'' - (2n+1)\Theta_n'^2;$$

infatti si ha in questo caso

$$\begin{aligned} \Theta_{n,1} &= \frac{1}{\Theta_n^2} \left\{ \frac{2n\Theta_n''}{\Theta_n} - \frac{(n+1)\Theta_n'^2}{\Theta_n^2} \right\} = \frac{1}{\Theta_n^2} |2n^2(n\eta^2 + \eta') - (2n+1)n^2\eta^2| = \\ &= \frac{n^2}{\Theta_n^2} (2\eta' - \eta^2) = 0. \end{aligned}$$

⁽¹²⁾ Vedi Memoria citata a nota (2).

⁽¹³⁾ Vedi CHIPELLINI, *Sulla effettiva riduzione delle equazioni differenziali alla forma ridotta di Laguerre-Forsyth*. (« Rend. Seminario Facoltà di Scienze », Cagliari 1938, fasc. I).