Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Giovanni Sansone

# Valutazione dell'errore nel calcolo effettivo del periodo del moto perturbato in un caso tipico di prima approssimazione

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2*, Vol. **1** (1939), n.5, p. 422–426.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_5_422_0>

# Valutazione dell'errore nel calcolo effettivo del periodo del moto perturbato in un caso tipico di prima approssimazione.

Nota di GIOVANNI SANSONE (a Firenze).

**Sunto.** - *L'A. trova il termine complementare di una formula di* T. LEVI-CIVITA *pel calcolo effettivo del periodo in un caso tipico di prima approssimazione.*

**1.** Se $F(s)$ è una funzione reale, continua insieme alla sua derivata prima, in un intervallo $(s_1, s_2)$, $s_1 < s_2$, e se

$$F(s_1) = 0, \quad F(s_2) = 0, \quad \lim_{s \to s_1+0} F(s)/(s - s_1) \neq 0, \quad \lim_{s \to s_2-0} F(s)/(s - s_2) \neq 0,$$

un teorema di WEIERSTRASS [1] assicura che *se* $s(t)$ *è una soluzione dell'equazione*

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = F(s),$$

*tale che per* $t = t_0$ *assuma un valore* $s(t_0)$ *soddisfacente la limitazione* $s_1 < s(t_0) < s_2$, *allora* $s(t)$ *è una funzione periodica, col periodo* $T$ *espresso dalla formula*

$$T = 2\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\sqrt{F(s)}}. \tag{I}$$

T. LEVI-CIVITA [2] nel caso particolare che

$$F(\varepsilon, s) = \omega^2(s - s_1)(s_2 - s) + \varepsilon g(s),$$

ha dato in prima approssimazione la formula

$$T = \frac{2\pi}{\omega} - \frac{\varepsilon}{\omega}\int_0^\pi \lambda(s) d\alpha \ (^3), \tag{1}$$

(1) Cfr. a) K. WEIERSTRASS, *Ueber eine Gattung reell periodischer Functionen*, « Math. Werke », II, pp. 1-18; b) T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica Razionale*, (Bologna, 1926), T. II, parte 1ª, pp. 28-33.

(2) T. LEVI-CIVITA, *Sul calcolo effettivo del periodo in un caso tipico di prima approssimazione*, « Revista de Ciencias », (Lima, Perù), 38, (1937), n. 421, pp. 71-78.

(3) Operando sulla (1) con due integrazioni per parti N. CARTOVITCH ha ottenuto la formula

$$T = \frac{2\pi}{\omega} + \frac{\varepsilon}{\omega^3}\int_0^\pi g''(s) \operatorname{sen}^2 \alpha d\alpha.$$

[N. CARTOVITCH, *Sul calcolo effettivo del moto perturbato in un caso tipico di prima approssimazione*, « Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei », (6), 27, (1938), pp. 45-70].

dove

$$\lambda(s) = -\frac{1}{\omega^2}\frac{G(s;s_1,s_2)}{V(s;s_1,s_2)}, \tag{2}$$

con

$$G(s;s_1,s_2) = \begin{vmatrix} g(s) & s & 1 \\ g(s_1) & s_1 & 1 \\ g(s_2) & s_2 & 1 \end{vmatrix}, \qquad V(s;s_1,s_2) = \begin{vmatrix} s^2 & s & 1 \\ s_1^2 & s_1 & 1 \\ s_2^2 & s_2 & 1 \end{vmatrix}, \tag{3}$$

e

$$2s = (s_1 + s_2) + (s_1 - s_2)\cos\alpha. \tag{4}$$

Daremo qui il termine complementare della (1), e per questo dimostreremo che *se* g(s) *è continua insieme alle sue derivate prime e seconde in un tratto* $(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$, $\bar{s}_1 < s_1 < s_2 < \bar{s}_2$, *sussiste la formula*

$$T = \frac{2\pi}{\omega} - \frac{\varepsilon}{\omega}\int_0^\pi \lambda(s)d\alpha + \varepsilon^{3/2}O(1). \tag{II}$$

**2.** L'equazione

$$F(\varepsilon, s) = \omega^2(s - s_1)(s_2 - s) + \varepsilon g(s) = 0, \tag{5}$$

è soddisfatta dalla coppia di valori $\varepsilon = 0$, $s = s_1$, e poichè si ha

$$F_s(0, s_1) = \omega^2(s_2 - s_1) \neq 0,$$

la (5), per $\varepsilon$ sufficientemente piccolo, ammette la radice

$$s_1^* = s_1 - \varepsilon\frac{F_\varepsilon(0, s_1)}{F_s(0, s_1)} + \varepsilon^2 O(1)$$

ossia

$$s_1^* = s_1 - \varepsilon\frac{g(s_1)}{\omega^2(s_2 - s_1)} + \varepsilon^2 O(1), \tag{6$_1$}$$

e analogamente l'altra radice

$$s_2^* = s_2 + \varepsilon\frac{g(s_2)}{\omega^2(s_2 - s_1)} + \varepsilon^2 O(1), \tag{6$_2$}$$

e giova notare che dalle $(6)_1$, $(6)_2$ segue che per $\varepsilon$ sufficientemente piccolo è $s_1^* < s_2^*$.

Si ha $F(\varepsilon, s_1^*) = 0$, $F(\varepsilon, s_2^*) = 0$, e dalla formula di interpolazione di Newton arrestata ai termini del secondo ordine otteniamo per $s$ variabile in $(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$

$$F(\varepsilon, s) = F(\varepsilon, s_1^*) + (s - s_1^*)\frac{F(\varepsilon, s_2^*) - F(\varepsilon, s_1^*)}{s_2^* - s_1^*} + \frac{1}{2}(s - s_1^*)(s - s_2^*)R(\varepsilon, s),$$

con

$$R(\varepsilon, s) = -2\omega^2 + \varepsilon g''(\bar{s}), \qquad \bar{s}_1 < \bar{s} < \bar{s}_2;$$

potremo perciò porre

$$F(\varepsilon, s) = \omega^2(s - s_1^*)(s_2^* - s)[1 + \varepsilon r(\varepsilon, s)], \tag{7}$$

con $|r(\varepsilon, s)|$ uniformemente limitato rispetto ad $\varepsilon$ sufficientemente piccolo, ed $s$ variabile in $(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$.

Sostituendo le $(6)_1$, $(6)_2$ nella (7) e tenuto conto della (5) abbiamo

$$\omega^2(s - s_1)(s_2 - s) + \varepsilon g(s) =$$
$$= \omega^2\left[(s - s_1) + \varepsilon \frac{g(s_1)}{\omega^2(s_2 - s_1)} + \varepsilon^2 O(1)\right]\left[(s_2 - s) + \varepsilon \frac{g(s_2)}{\omega^2(s_2 - s_1)} + \varepsilon^2 O(1)\right] \times$$
$$\times [1 + \varepsilon r(\varepsilon, s)],$$

$$\omega^2(s - s_1)(s_2 - s) r(\varepsilon, s) = g(s) - \frac{g(s_1)}{s_2 - s_1}(s_2 - s) - \frac{g(s_2)}{s_2 - s_1}(s - s_1) + \varepsilon\omega^2 h(\varepsilon, s),$$

con $h(\varepsilon, s)$ uniformemente limitata rispetto ad $\varepsilon$ ed $s$, e da quest' ultima, tenuto conto delle (2) e (3) otteniamo

$$r(\varepsilon, s) = \lambda(s) + \varepsilon \frac{h(\varepsilon, s)}{(s - s_1)(s_2 - s)}. \tag{8}$$

Si ha

$$(9)_1 \qquad \lim_{s \to s_1} \lambda(s) = -\frac{1}{\omega^2}\begin{vmatrix} g'(s_1) & 1 & 0 \\ g(s_1) & s_1 & 1 \\ g(s_2) & s_2 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2s_1 & 1 & 0 \\ s_1^2 & s_1 & 1 \\ s_2^2 & s_2 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= \frac{-1}{\omega^2(s_2 - s_1)^2}\begin{vmatrix} g'(s_1) & 1 & 0 \\ g(s_1) & s_1 & 1 \\ g(s_2) & s_2 & 1 \end{vmatrix};$$

e analogamente

$$(9)_2 \qquad \lim_{s \to s_2} \lambda(s) = \frac{1}{\omega^2(s_2 - s_1)^2}\begin{vmatrix} g'(s_2) & 1 & 0 \\ g(s_1) & s_1 & 1 \\ g(s_2) & s_2 & 1 \end{vmatrix};$$

ne viene che la funzione $\lambda(s)$ è finita continua in $(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$, e si verificherà pure facilmente che essa ha derivata continua nello stesso intervallo e perciò limitata.

Abbiamo ora per le $(6)_1$, $(6)_2$, (8)

$$(s - s_1^*)(s_2^* - s)[r(\varepsilon, s) - \lambda(s)] = (s - s_1)(s_2 - s)[r(\varepsilon, s) - \lambda(s)] + \varepsilon O(1) =$$
$$= \varepsilon h(\varepsilon, s) + \varepsilon O(1) = \varepsilon k(\varepsilon, s),$$

con $k(\varepsilon, s)$ uniformemente limitata rispetto ad $\varepsilon$ ed $s$, ed anche

$$r(\varepsilon, s) = \lambda(s) + \varepsilon \frac{k(\varepsilon, s)}{(s - s_1^*)(s_2^* - s)}, \tag{10}$$

la quale mostra che il termine $\varepsilon k(\varepsilon, s)/(s-s_1^*)(s_2^*-s)$ è uniformemente limitato rispetto ad $\varepsilon$ ed $s$.

Si ha dalla (I), per il periodo $T$ corrispondente alla funzione $F(\varepsilon, s)=\omega^2(s-s_1)(s_2-s)+\varepsilon g(s)$,

$$T=\frac{2}{\omega}\int_{s_1^*}^{s_2^*}\frac{ds}{\sqrt{(s-s_1^*)(s_2^*-s)[1+\varepsilon r(\varepsilon, s)]}},$$

e col cangiamento di variabile

$$2s=(s_1^*+s_2^*)-(s_2^*-s_1^*)\cos\alpha, \tag{11}$$

$$T=\frac{2}{\omega}\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon r(\varepsilon, s)}}\,d\alpha\,;$$

ma

$$[1+\varepsilon r(\varepsilon, s]^{-1/2}=1-\frac{1}{2}\varepsilon r(\varepsilon, s)+\varepsilon^2 O(1),$$

perciò, tenuto conto della (10),

$$T=\frac{2\pi}{\omega}-\frac{\varepsilon}{\omega}\int_0^{\pi}\lambda(s)d\alpha+\varepsilon^2\int_0^{\pi}\frac{k(\varepsilon, s)}{(s-s_1^*)(s_2^*-s)}\,d\alpha+\varepsilon^2 O(1), \tag{12}$$

con $s$ espresso dalla (11).

Osserviamo che si ha

$$\varepsilon\int_0^{\pi}\frac{k(\varepsilon, s)}{(s-s_1^*)(s_2^*-s)}\,d\alpha=\int_0^{\varepsilon^{1/2}}\frac{\varepsilon k(\varepsilon, s)}{(s-s_1^*)(s_2^*-s)}\,d\alpha+\int_{\pi-\varepsilon^{1/2}}^{\pi}\frac{\varepsilon k(\varepsilon, s)}{(s-s_1^*)(s_2^*-s)}\,d\alpha+$$

$$+\varepsilon\int_{\varepsilon^{1/2}}^{\pi-\varepsilon^{1/2}}\frac{k(\varepsilon, s)}{(s-s_1^*)(s_2^*-s)}\,d\alpha\,;$$

ma

$$\int_0^{\varepsilon^{1/2}}\frac{\varepsilon k(\varepsilon, s)}{(s-s_1^*)(s_2^*-s)}\,d\alpha=\varepsilon^{1/2}O(1),\qquad \int_{\pi-\varepsilon^{1/2}}^{\pi}\frac{\varepsilon k(\varepsilon, s)}{(s-s_1^*)(s_2^*-s)}\,d\alpha=\varepsilon^{1/2}O(1),$$

$$\varepsilon\int_{\varepsilon^{1/2}}^{\pi-\varepsilon^{1/2}}\frac{k(\varepsilon, s)}{(s-s_1^*)(s_2^*-s)}\,d\alpha=\varepsilon O(1)\int_{\varepsilon^{1/2}}^{\pi-\varepsilon^{1/2}}\frac{d\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}=\varepsilon O(1)\operatorname{ctg}\varepsilon^{1/2}=\varepsilon^{1/2}O(1),$$

e la (12) dà

$$T=\frac{2\pi}{\omega}-\frac{\varepsilon}{\omega}\int_0^{\pi}\lambda(s)d\alpha+\varepsilon^{3/2}O(1). \tag{13}$$

Se teniamo conto che $\lambda(s)$ ha derivata prima limitata in $(\bar{s}_1, s_2)$, dalle (11), $(6)_1$, $(6)_2$ otteniamo

$$\lambda(s) = \lambda\left[\frac{s_1 + s_2}{2} - \frac{s_2 - s_1}{2}\cos\alpha\right] + \varepsilon O(1),$$

e sostituendo nella (13) si ottiene appunto la (II).