
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ENEA BORTOLOTTI

Geometria proiettiva differenziale dei 3-tessuti di curve spaziali (terne di congruenze)

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
2, Vol. 1 (1939), n.5, p. 409–421.*

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_5_409_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_5_409_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1939.

SEZIONE SCIENTIFICA

PICCOLE NOTE

Geometria proiettiva differenziale dei 3-tessuti di curve spaziali (terne di congruenze).

Nota di ENEA BORTOLOTTI (a Firenze).

Sunto. - *Reticoli spaziali e riferimenti proiettivi anolonomi; rappresentazione della connessione proiettiva integrabile dell'ambiente. Invarianti proiettivi differenziali del 2° ordine legati a un 3-tessuto, e in particolare alle tre superficie anolonome che esso determina. Riferimento proiettivo locale invariante e suo significato.*

1. La geometria proiettiva differenziale delle terne di congruenze di linee (cioè in breve: *3-tessuti* di linee) nell' S_3 ordinario è stata studiata in una recente memoria di G. FUBINI⁽¹⁾; quale estensione al campo proiettivo delle ricerche di LAMÉ e di RICCI sulle terne di congruenze ortogonali in R_3 euclideo, o in V_3 riemanniana. Ho avuto l'occasione di notare⁽²⁾ come la teoria svolta dal FUBINI si connetta da un lato con lo studio delle *connessioni proiettive*, d'altra parte con quello delle *superficie anolonome* (X_3^2) in S_3 . Credo che possa presentare un qualche interesse l'esposizione del mio punto di vista: dò a questo scopo un abbozzo di ricostruzione della teoria ove utilizzando i procedimenti del BOM-

(¹) *Sulle terne di congruenze di curve nello spazio proiettivo*, « Annali di Matematica », (4), 16, 1937, 1-33. Sulla geometria proiettiva dei pluri-tessuti, nel piano e nello spazio, ved. anche: il Cap. X (pp. 147 e segg.) della *Introduction à la Géométrie projective différentielle des surfaces* di G. FUBINI ed E. CECH (Paris, Gauthier-Villars, 1931); G. FUBINI, *Sur la géométrie projective des réseaux plans*, « Compositio Mathematica », 1, 1934, 103-105; e le note di G. PALOZZI in « Rendiconti Lincei », (6), 18, 1933, 537-542; 22, 1935, 103-107, 202-211; 24, 1936, 53-59.

(²) Ved. *Ricerche geometriche in Italia nell'Anno XVI E. F.*, « Atti Soc. Ital. per il Progr. delle Scienze », XXVII Riun., Bologna 1938, vol. 2°.

PIANI per la costruzione di invarianti proiettivi di elementi curvilinei ⁽³⁾ ottengo in modo geometrico svariati nuovi elementi invarianti e dò interpretazione geometrica di altri che già erano stati ottenuti per via analitica. Mi limito qui (come fa anche il FUBINI) agli elementi *del 2° ordine*, ma naturalmente non presenterebbe difficoltà sostanziali l'analoga indagine di intorni più elevati; e neppure l'estensione al caso di ambiente curvo; o di n -tessuti in S_n .

2. Assegniamo il reticolo e, insieme, associamo ai singoli punti y^x ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots = 0, 1, 2, 3$) riferimenti proiettivi locali per S_3 dando tre campi di punti (indipendenti) B^x (y^0, y^1, y^2, y^3) ($r, s, t, p, q = 1, 2, 3$); ove le B^x s'intenderanno funzioni omogenee di grado 1 delle y^x . Le tangenti t_1, t_2, t_3 in y alle tre linee $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ del reticolo che ne escono sono le congiungenti y ai tre punti B_1, B_2, B_3 . Naturalmente, posto $B^x = y^x$, senza che cambi il reticolo le B^x ($\lambda, \mu, \nu, \tau, \omega = 0, 1, 2, 3$) potranno subire la più generale trasformazione

$$(2.1) \quad 'B^x = k_r^r B^x + k_r^o B^o, \quad 'B^o = k_o^o B^o$$

ove le $k_{\mu'}^{\lambda}$ sono funzioni arbitrarie (omogenee di grado zero) delle y^x tali soltanto che si abbia

$$(2.2) \quad k_{s'}^r = 0 \quad \text{per} \quad s' \equiv r \quad (4)$$

$$(2.3) \quad \kappa_{o'} = 0, \quad |k_{\mu'}^{\lambda}| = k_o^o k_1^1 k_2^2 k_3^3 \neq 0.$$

In relazione a ciascun punto y^x di S_3 un qualunque altro punto Y^x avrà, nel corrispondente riferimento B^x , coordinate lo-

(3) Ved. *Alcuni invarianti proiettivi di elementi curvilinei*, « Rendiconti Lincei », (6), 22, 1935, 483-491; *Gli invarianti proiettivi nella teoria delle superficie. I: Ricostruzione rapida della teoria delle applicabilità proiettive*. Ibid., 24, 1936, 323-332; *Costruzione di elementi superficiali a partire da elementi curvilinei*. Ibid., 25, 1937, 149-154; *Alcuni risultati di geometria proiettivo-differenziale*, « Rendic. Semin. Milano », 10, 1936, 9-36; *Gli analoghi proiettivi dei teoremi di Meusnier e di Eulero*, « Rendic. Semin. Roma », (4), 2, 1938, 99-120; *Costruzione delle calotte superficiali di 2° ordine in un iperspazio*, « Rendiconti Lincei », (6), 29, 1939, 3-11.

(4) Scrivendo $s' \equiv r$ oppure $s' \equiv \equiv r$ intendiamo significare che s' ed r prendono valori di *egual posto*, o invece di *posto differente*, nelle due serie di contrassegni 1' 2' 3'; 1 2 3.

cali z^λ tali che sia $Y^z = B^z z^\lambda$; onde anche $z^\lambda = \overset{\lambda}{B}_z Y^z$, ove con $\overset{\lambda}{B}_z$ si indicano gli elementi reciproci delle B^z nel loro determinante $|B^z|$. In particolare le coordinate locali di un punto $y^z + dy^z$ infinitamente vicino al punto y^z sono: $z^0 = 1 + \overset{0}{B}_z dy^z$, $z^r = \overset{r}{B}_z dy^z$; cosicchè a meno degli infinitesimi d'ordine superiore al primo una direzione uscente da y^z si potrà considerare definita dai tre pffaffiani $du = \overset{1}{B}_z dy^z$, $dv = \overset{2}{B}_z dy^z$, $dw = \overset{3}{B}_z dy^z$, che scriveremo anche $(du)^r = \overset{r}{B}_z dy^z$. Occorre però anche $(du)^0 = \overset{0}{B}_z dy^z$ per esprimere il differenziale di una funzione $\Phi(y^0, y^1, y^2, y^3)$ che sia omogenea di grado m qualunque nelle y^z : introdotta la derivata anolonoma $\partial_\lambda \Phi = B^z \frac{\partial \Phi}{\partial y^z}$ si ha $\partial_0 \Phi = m\Phi$; e $d\Phi = \partial_\lambda \Phi (du)^\lambda = m\Phi (du)^0 + \partial_r \Phi (du)^r$.

I tre piani π_{12} , π_{23} , π_{31} che contengono, due a due, le tangenti t_1, t_2 ; t_2, t_3 ; t_3, t_1 sono i piani tangenti, nel punto y generico, a tre superficie anolonome σ_{12} , σ_{23} , σ_{31} : le quali hanno le linee del reticolo quali mutue intersezioni ⁽⁵⁾. Indichiamo ancora con ξ_1, ξ_2, ξ_3 i piani osculatori nel punto y alle linee $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ che ne escono.

3. In relazione ai riferimenti locali B^z la connessione proiettiva integrabile dell'ambiente S_3 ha parametri proiettivi (normalizzati ⁽⁶⁾) dati da:

$$(3.1) \quad \Pi_{\mu\nu}^\lambda = \partial_\nu B^\lambda \cdot \overset{\lambda}{B}_\mu$$

tali che, in particolare, risulta

$$(3.2) \quad \Pi_{\mu 0}^\lambda = \overset{\lambda}{\delta}_\mu, \quad \Pi_{0\nu}^\lambda = \overset{\lambda}{\delta}_\nu, \quad (\Pi_{0r}^0 = 0).$$

⁽⁵⁾ Ved. a questo proposito la mia nota: *Geometria proiettiva differenziale delle superficie anolonome*, « Atti 1° Congr. Un. Matem. Italiana », Firenze 1937, 305-311; e il lavoro di E. BOMPIANI, *Sulle varietà anolonome. I: Alcuni teoremi generali*; II: *Le V_3^2 di S_3 proiettivo*, « Rendiconti Lincei », (6), 27, 1938, 37-45, 45-52.

⁽⁶⁾ Ved. pp. 32-33 del lavoro: *Contributi alla teoria delle connessioni. I: Connessioni proiettive; costruzione al finito, classificazione secondo Klein*, di E. BORTOLOTTI e V. HLAVATY, « Annali di Matematica », (4), 15, 1936, 1-45, 129-154.

In relazione a questi parametri per le B^α sussistono le equazioni differenziali

$$(3.3) \quad \partial_r B^\alpha = \Pi_{\lambda r}^\mu B^\alpha \quad (\text{o anche } \partial_\nu B^\alpha = \Pi_{\lambda \nu}^\mu B^\alpha \quad (?)).$$

Le condizioni d'integrabilità di queste sono identicamente soddisfatte ⁽⁸⁾: esse si esprimono così:

$$(3.4) \quad \Pi_{rs}^{\lambda\mu} = \partial_s \Pi_{\lambda r}^\mu - \partial_r \Pi_{\lambda s}^\mu + \Pi_{\lambda r}^\nu \Pi_{\nu s}^\mu - \Pi_{\lambda s}^\nu \Pi_{\nu r}^\mu + 2\Omega_{rs}^\nu \Pi_{\lambda \nu}^\mu = 0,$$

ove $2\Omega_{rs}^\nu(du)^\nu(\delta u)^s$ è il covariante bilineare della forma pfaffiana $(du)^\nu$, cioè $\Omega_{rs}^\nu = \frac{1}{2}(\partial_r B_s^\alpha - \partial_s B_r^\alpha)B_\alpha^\nu$ e quello che potrebbe dirsi, per S_3 ,

l'oggetto d'anonomia proiettivo ⁽⁹⁾. Cosicché l'annullarsi di Ω_{rs}^t per $t=1, 2, 3$ esprime che $(du)^1, (du)^2, (du)^3$ sono effettivi differenziali di parametri olonomi: e in particolare, che le superficie $\sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}$ (rispettivamente) sono olonome (per questo basterebbe che fosse $\Omega_{23}^1 = 0, \Omega_{31}^2 = 0, \Omega_{12}^3 = 0$); l'annullarsi di Ω_{rs}^0 esprime che $(du)^0$ è il differenziale di un parametro w^0 , e in particolare, che la trasformazione dualistica definita facendo corrispondere ai punti y i piani τ che contengono i punti B_1, B_2, B_3 (piani opposti ai vertici $y = B$ nei tetraedri fondamentali dei riferimenti proiettivi locali) è la polarità rispetto a una superficie, $w^0 = \text{cost.}$ (Per questo basta che $\Omega_{rs}^0(du)^r(\delta u)^s$ sia nullo in forza della $(du)^0 = 0$ ⁽¹⁰⁾).

(7) Queste sono soddisfatte identicamente per $\nu = 0$.

(8) Il tensore $\Pi_{rs}^{\lambda\mu}$ della formula che segue è il tensore di curvatura della derivazione proiettiva di parametri $\Pi_{\mu\nu}^\lambda$ (ved. *Contributi...* già cit.: pp. 47-50): il cui annullarsi è condizione sufficiente perchè si annulli anche

il tensore di curvatura della connessione, $L_{rs\lambda}^{\mu\nu} = \Pi_{rs\lambda}^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \delta_\lambda^\mu \Pi_{rs\nu}^{\rho\nu}$.

(9) In mancanza di meglio adotto, estendendola al caso attuale, la denominazione « oggetto d'anonomia » usata da J. A. SCHOUTEN e D. J. STRUIK (ved.: *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie*, zweite Aufl., Groningen 1935, B. I, p. 68). Un'interpretazione geometrica di questo ente, anzi l'unica nota sinora (se pure indiretta) pel caso affine è indicata nella mia Nota: *Superficie anonome complementari*, in « Scritti matem. offerti a L. Berzolari », Pavia 1936, pp. 553-576; ved. p. 572.

(10) Nei riguardi di questa trasformazione dualistica ved. p. 122 del mio lavoro: *Spazi proiettivamente piani*, « Annali di Matem. », (4), 11, 1932, 111-134; e cfr. le mie note più recenti: *Trasformazioni dualistiche e spazi proiettivamente piani*, « Bollettino Un. Matem. Italiana », 17, 1938, 219-223:

In conseguenza dell'annullarsi di $\Pi_{rs\lambda}^{\mu}$ si ha, in particolare,

$$(3.5) \quad \Pi_{rso}^{\circ} = \Pi_{rs}^{\circ} - \Pi_{sr}^{\circ} + 2\Omega_{rs}^{\circ} = 0,$$

$$(3.6) \quad \Pi_{rso}^{\circ p} = \Pi_{rs}^{\circ p} - \Pi_{sr}^{\circ p} + 2\Omega_{rs}^{\circ p} = 0,$$

$$(3.7) \quad \Pi_{rs}^{\circ} = \frac{1}{8} (3R_{tsr}^{\cdot t} + R_{trs}^{\cdot t})$$

ove $R_{rsp}^{\cdot q}$ è il tensore di curvatura della connessione affine di parametri Π_{st}^r ⁽¹¹⁾; cosicchè esprimiamo in termini finiti o con sole derivazioni i parametri Π_{rs}° , e (ad es.) $\Pi_{rs}^{\cdot t}$ ove sia $r > s$, per l'oggetto d'anolonomia proiettivo e pei parametri rimanenti: i quali d'altra parte sono anche legati da relazioni differenziali. Ora: le (3.3) mostrano che appunto con le Π_{rs}^{μ} (ed Ω_{rs}^{μ}) potranno esprimersi o rappresentarsi (in termini finiti) tutti gli enti *legati all'intorno del 2° ordine* del punto y sul reticolo. Di questi appunto veniamo ora ad occuparci.

4. Anzitutto vi sono gli enti legati all'intorno del 2° ordine del punto y considerato — che ora indicheremo con O — *sulle tre superficie anolonome* ciascuna a sè considerata. Elemento fondamentale è la *proiettività di cella* del BOMPIANI (loc. cit.): la quale a una direzione $(du)^r$ uscente da O fa corrispondere la retta del piano tangente a ciascuna delle tre superficie, ad es. a σ_{12} , che è posizione limite dell'intersezione di questo piano π_{12} col piano tangente a σ_{12} in un punto che, lungo una linea (qualunque, di S_2) uscente da O nella supposta direzione, tende ad O . Questa retta ha sul piano $z^2 = 0$ l'equazione ⁽¹²⁾

$$(4.1) \quad z^{\circ}(du)^2 + \Pi_{1r}^3(du)^r z^1 + \Pi_{2r}^3(du)^r z^2 = 0;$$

la quale pone in evidenza la rappresentazione analitica della *proiettività di cella*. In particolare facendo $(du)^2 = 0$ si ha la *proietti-*

Sulla geometria proiettiva differenziale delle trasformazioni dualistiche, « Rendiconti Lincei », (6), 28, 1938, 224-230.

Colgo l'occasione per segnalare un errore di stampa che va corretto in quest'ultimo lavoro: nella form. (3.10), a fine p. 226, al luogo di $\partial_r P^{\alpha}$ deve leggersi $D_r P^{\alpha}$. Si confronti con la form. (3.1) del presente lavoro: ove abbiamo, anzichè derivate covarianti rispetto a parametri olonomi, derivate *anolonome*.

⁽¹¹⁾ Cfr. ad es. p. 572 della mia Nota già cit.: *Superficie anolonome complementari*.

⁽¹²⁾ Questa formula non differisce dalla (55) p. 14 del FUBINI (loc. cit.).

vità di calotta del BOMPIANI (o *proiettività di coniugio* secondo FUBINI): subordinata dalla precedente entro il fascio di direzioni tangenti a σ_{12} in O . Quest'ultima proiettività è un'involuzione se l'invariante relativo $I_1 = \Pi_{21}^3 - \Pi_{12}^3 = 2\Omega_{12}^3$ si annulla cioè se σ_{12} è olonoma; o ancora, se ha il valore -1 l'invariante assoluto

$$(4.2) \quad p_{12} = \frac{I_1 + \sqrt{I_1^2 - 4I_2}}{I_1 - \sqrt{I_1^2 - 4I_2}}, \quad \text{ove} \quad I_2 = \Pi_{12}^3 \Pi_{21}^3 - \Pi_{11}^3 \Pi_{22}^3.$$

Questo e gli altri due che se ne hanno circolando su 1, 2, 3 sono tre invarianti assoluti del reticolo in O . Le linee autoconiugate, o asintotiche, della superficie anolonoma σ_{12} risultano evidentemente date dall'equazione differenziale

$$(4.3) \quad \Pi_{11}^3 du^2 + (\Pi_{12}^3 + \Pi_{21}^3) dudv + \Pi_{22}^3 dv^2 = 0.$$

Altri elementi relativi alle tre superficie anolonome: quali le estensioni, da me indicate ⁽¹³⁾, delle *forme elementari* del BOMPIANI e quindi delle *forme normali*, quadratica e cubica, del FUBINI; ecc. non utilizzeremo qui perchè dipendono da intorno d'ordine > 2 .

5. Ma la considerazione *simultanea* delle tre superficie anolonome, o anche soltanto dei tre elementi curvilinei del 2° ordine delle tre curve del reticolo uscenti da O dà agevolmente parecchi altri invarianti.

Per proiezione da O su un piano qualunque (non per O) i tre elementi E_2 delle tre linee $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ del reticolo danno tre elementi E_1 (del 1° ordine) di centri distinti: cui si collega un *invariante numerico finito*, il birapporto formato, insieme alle due coniche degeneri del loro fascio, dalle due coniche determinate imponendo ad entrambe il passaggio pel primo E_1 (considerando i tre elementi E_1 in un certo ordine, *arbitrario*) e ad una il contenere il secondo E_2 e il centro del terzo: all'altra il contenere il terzo E_2 e il centro del secondo. Tale birapporto ha il valore

$$(5.1) \quad \mu = - \frac{\Pi_{22}^3 \Pi_{44}^2 \Pi_{33}^4}{\Pi_{33}^2 \Pi_{44}^3 \Pi_{22}^4}$$

(o il valore reciproco). Ponendolo eguale ad 1 si esprime che, nel piano, *i tre E_1 appartengono a una conica*: o, nello spazio, *che i tre E_2 di $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ in O appartengono a uno stesso cono quadrico proiettante da O* . Tale condizione sarà certo soddisfatta in ogni

(13) Nella già cit. comunicazione al 1° Congr. U. M. I.; pp. 309 e seg.

punto di S_3 se le curve del reticolo appartengono a uno stesso complesso quadratico: ma anche se, più in generale, esse appartengono a una stessa « superficie anolonomia di specie 2 » così chiamando la totalità delle curve integrali di un'equazione quadratica di Monge: che escono dai singoli punti dello spazio secondo le direzioni di un cono quadrico⁽¹⁴⁾. Un esempio è la totalità delle curve isotrope di una metrica riemanniana data ad S_3 arbitrariamente (non subordinata alla geometria proiettiva dell'ambiente; nel qual caso si avrebbero le ordinarie curve isotrope, appartenenti al complesso quadratico delle rette isotrope dello spazio).

Se l'invariante μ dato dalla (5.1) ha il valore -1 , cioè le tre coniche dette sopra hanno due a due contatto armonico, le tangenti ai tre E_i (nel piano) passano per un punto, cioè i piani osculatori a $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ in O passano per una stessa retta (e viceversa).

Di qui, o dalla rappresentazione analitica (5.1), risulta che $-\mu$ è quello che il FUBINI (che l'ha ottenuto per altra via) chiama « invariante di Menelao e di Ceva » pel reticolo. Il FUBINI ne ha dato quest'altra interpretazione geometrica: esso è il birapporto di due dei piani $\pi_{23}, \pi_{31}, \pi_{12}$ (ad es. dei primi due), del piano osculatore ξ_3 a Γ_2 e del piano che da t_3 proietta la retta intersezione degli altri due piani osculatori. Ma ora lo ritroveremo anche in altre maniere, sempre per via geometrica.

Per brevità di linguaggio conveniamo di indicare con z_1, z_2, z_3 tre punti presi (comunque, fuori di O cioè distinti da y) sulle tre tangenti t_1, t_2, t_3 a $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ in O ; con y_1, y_2, y_3 tre punti infinitamente vicini ad O sulle tre curve. Sia poi z un punto infinitamente vicino ad O su una generica curva Γ che ne esce, e sia t in O la tangente a questa curva. All'elemento del 1° ordine di Γ in O si collegano in modo ovvio tre invarianti finiti: uno dei quali si ha come birapporto dei piani $\pi_{31}, \pi_{32}, \xi_3, t_3t$; cioè come

(parte principale del) birapporto $yz_3(z_1z_2y_3z)$. Il suo valore è $\frac{\Pi_{33}^2 du}{\Pi_{33}^1 dv}$;

analogamente abbiamo gli altri due invarianti $\frac{\Pi_{41}^3 dv}{\Pi_{41}^1 dw}, \frac{\Pi_{22}^4 dw}{\Pi_{22}^2 du}$. Il

prodotto di questi tre invarianti non dipende più dalla direzione di Γ in O : è $-\frac{1}{\mu}$.

⁽¹⁴⁾ Cfr. D. SINTSOW, *Ueber die Geometrie der Mongeschen Gleichungen*. « Abhandlungen Semin. f.-Vektor- und Tensoranalysis », Moskau, IV, 1937, 182-183 (anche per ulteriore bibl.); ed E. BOMPIANI, *Sulle curve appartenenti a complessi di rette*, « Atti 1° Congr. Un. Matem. Italiana », Firenze 1937, 292-295.

Al luogo di z prendiamo il punto y_1 su Γ_1 e formiamo il birapporto (infinitesimo) $yz_3(y_1, z_2, z_1, y_3)$. La sua parte principale è $-\frac{1}{2} \frac{\Pi_{11}^2 \Pi_{33}^4}{\Pi_{33}^2} du$: scambiando il ruolo delle due curve Γ_2, Γ_3 otter-

remmo invece $-\frac{1}{2} \frac{\Pi_{11}^3 \Pi_{22}^4}{\Pi_{22}^2} du$. Altri quattro invarianti risultano poi

ovviamente circolando: $-\frac{1}{2} \frac{\Pi_{22}^3 \Pi_{11}^2}{\Pi_{11}^3} dv, -\frac{1}{2} \frac{\Pi_{22}^4 \Pi_{33}^2}{\Pi_{33}^4} dv, -\frac{1}{2} \frac{\Pi_{33}^4 \Pi_{22}^3}{\Pi_{22}^4} dv,$

$-\frac{1}{2} \frac{\Pi_{33}^2 \Pi_{11}^3}{\Pi_{11}^2} dv$. Ad es. ciascuno dei primi due potrebbe assumersi

sulla linea Γ_1 quale *elemento d'arco invariante*. Il rapporto dei due invarianti di ciascuna delle tre coppie dà ancora l'invariante $-\mu$.

Un procedimento analogo a quello che, applicato agli E_2 delle due asintotiche, darebbe la forma quadratica normale del FUBINI per σ_{12} dà subito un nuovo invariante per σ_{12} (ma dipendente dagli E_2 delle curve Γ_1 e Γ_2 , sue intersezioni in O con σ_{31} e σ_{23}): la parte principale di $yz_3(z_1, z_2, y_1, y_3)$, data da $\frac{1}{4} \Pi_{11}^2 \Pi_{22}^4 dudv$. Analogamente

otterremmo (in relazione a σ_{23}, σ_{31}) $\frac{1}{4} \Pi_{22}^3 \Pi_{33}^2 dv dw, \frac{1}{4} \Pi_{33}^4 \Pi_{11}^3 dv du$.

Per combinazione degli invarianti così ottenuti ⁽¹⁵⁾ è agevole ottenerne altri, in parte già per altra via ricavati dal FUBINI ⁽¹⁶⁾: ad es. si ha la forma cubica, in un solo paffiano,

$$(5.2) \quad \Pi_{22}^4 \Pi_{11}^2 dudv \cdot \frac{\Pi_{11}^2 \Pi_{33}^4}{\Pi_{33}^2} du \cdot \frac{\Pi_{33}^2 du}{\Pi_{33}^4 dv} = (\Pi_{11}^2)^2 \Pi_{22}^4 du^3$$

e con procedimento analogo troviamo gli altri cinque invarianti

$$\begin{aligned} & (\Pi_{11}^3)^2 \Pi_{33}^4 du^3, (\Pi_{22}^3)^2 \Pi_{33}^2 dv^3, (\Pi_{22}^4)^2 \Pi_{11}^2 dv^3, \\ & (\Pi_{33}^4)^2 \Pi_{11}^3 dv^3, (\Pi_{33}^2)^2 \Pi_{22}^3 dv^3; \end{aligned}$$

coi quali si possono formare le due forme cubiche

$$(5.3) \quad \begin{cases} \Pi_{22}^4 (\Pi_{11}^2)^2 du^3 + \Pi_{33}^2 (\Pi_{22}^3)^2 dv^3 + \Pi_{11}^3 (\Pi_{33}^4)^2 dv^3 \\ \Pi_{33}^4 (\Pi_{11}^3)^2 du^3 + \Pi_{11}^2 (\Pi_{22}^4)^2 dv^3 + \Pi_{22}^3 (\Pi_{33}^2)^2 dv^3 \end{cases}$$

⁽¹⁵⁾ Per questo occorrerà, trattandosi di ragguagliare valori degli paffiani du, dv, dw calcolati in *direzioni differenti*, un'agevole estensione della « corrispondenza armonica » del BOMPIANI: ved. la nota *Gli invarianti protettivi nella teoria delle superficie...* già cit.

⁽¹⁶⁾ Questi ha anche trovato per via analitica la forma $\Pi_{11}^2 \Pi_{22}^4 dudv$ detta poco sopra (loc. cit., p. 16).

costituenti insieme quello che il FUBINI chiama *elemento lineare proiettivo* del reticolo (loc. cit.; p. 10). E i rapporti delle tre coppie di forme cubiche monomie danno gli invarianti

$$(5.4) \quad \frac{(\Pi_{11}^3)^2 \Pi_{33}^1}{(\Pi_{11}^2)^2 \Pi_{22}^1}, \quad \frac{(\Pi_{22}^1)^2 \Pi_{11}^2}{(\Pi_{22}^3)^2 \Pi_{33}^2}, \quad \frac{(\Pi_{33}^2)^2 \Pi_{22}^3}{(\Pi_{33}^1)^2 \Pi_{11}^3}$$

il primo dei quali ad es. esprime, come ha osservato il FUBINI (p. 23), il prodotto dei birapporti che, su π_{23} , ciascuna delle direzioni asintotiche di σ_{23} forma con le intersezioni del piano π_{23} col piano osculatore a Γ_1 e coi piani π_{12} , π_{31} .

Ancora: ricaviamo l'invariante, legato a una direzione (du , dv) in π_{12}

$$(5.5) \quad \frac{\Pi_{11}^3 \Pi_{22}^1}{\Pi_{22}^2} du \cdot \frac{\Pi_{33}^2 du}{\Pi_{33}^1 dv} \cdot \frac{\Pi_{22}^1 \Pi_{33}^2 dv}{\Pi_{33}^1} = \frac{\Pi_{11}^3 du^2}{\Pi_{22}^2 dv^2}$$

e analogamente $\frac{\Pi_{22}^1 dv^2}{\Pi_{33}^1 du^2}$, $\frac{\Pi_{33}^2 dv^2}{\Pi_{11}^1 du^2}$: che eguagliati ad 1 danno, sui tre piani π_{12} , π_{23} , π_{31} , le coppie di *rette principali* del BOMPIANI⁽¹⁷⁾ legate alle intersezioni di Γ_1 , Γ_2 ; Γ_2 , Γ_3 ; Γ_3 , Γ_1 : luogo dei punti onde gli E_2 delle tre curve in O si proiettano l'uno nell'altro.

Fra tutti gli invarianti ora notati, dipendenti dai sei parametri Π_{11}^2 , Π_{22}^1 , Π_{22}^3 , Π_{33}^2 , Π_{33}^1 , Π_{11}^3 , appunto sei sono indipendenti: ad es.

$$(5.6) \quad \Pi_{11}^2 \Pi_{22}^1 dudv \cdot \frac{\Pi_{33}^2 du}{\Pi_{33}^1 dv} \cdot \frac{\Pi_{22}^1 \Pi_{33}^2 dv}{\Pi_{33}^1} = \Pi_{11}^2 \frac{du^2}{dv}$$

e gli altri analoghi esprimibili nella forma $\Pi_{rr}^s \frac{[(du)^r]^2}{(du)^s}$ ove $r \neq s$; e rispetto ad r non s'intende eseguita la somma⁽¹⁸⁾. Ma del resto questo era in sostanza prevedibile osservando la rappresentazione analitica degli E_2 delle tre curve Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 , ad es. della prima, in O , rispetto al riferimento locale B^2 : in coordinate non omogenee

$Z^r = \frac{z^r}{z^0}$ otteniamo

$$(5.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} Z^1 = du + \dots \\ Z^2 = \frac{1}{2} \Pi_{11}^2 du^2 + \dots \\ Z^3 = \frac{1}{2} \Pi_{11}^3 du^2 + \dots \end{array} \right. \quad \text{onde anche} \quad \left\{ \begin{array}{l} Z^2 = \frac{1}{2} \Pi_{11}^2 (Z^1)^2 + \dots \\ Z^3 = \frac{1}{2} \Pi_{11}^3 (Z^1)^2 + \dots \end{array} \right.$$

⁽¹⁷⁾ Ved.: *Invarianti d'intersezione di due curve sghembe*, « Rendiconti Lincei », (6), 14, 1931, 456-461.

⁽¹⁸⁾ Ved. FUBINI, loc. cit., p. 10.

Naturalmente i coefficienti Π_{11}^2 , Π_{11}^3 , ... cambiano al mutare della normalizzazione delle B^x e quindi dei punti unità dei riferimenti locali sulle rette t_1, t_2, t_3 : condizione perchè due diversi sistemi di valori delle Π_{33}^r ⁽¹⁹⁾ diano in realtà *la stessa terna di elementi E_2* , è che siano eguali i corrispondenti valori dei tre invarianti (5.4). È questa l'intima ragione del fatto, notato dal FUBINI (loc. cit., p. 23) che l'eguaglianza dei valori dei rapporti (5.4) per due reticoli fra loro riferiti mediante una rappresentazione puntuale fra i loro S_3 , in punti corrispondenti, è la condizione per la loro « applicabilità proiettiva », nel senso in cui questa relazione è definita dal FUBINI. Cioè in sostanza, perchè fra le proiettività che portano a sovrapporre un qualunque punto O del primo spazio (in cui è dato il primo reticolo) e le tangenti in esso alle tre curve del reticolo al punto O^* corrispondente e alle tangenti in esso alle curve corrispondenti, ve ne siano che fanno corrispondere anche gli elementi E_2 delle tre coppie di curve in O e in O^* .

6. Gli invarianti dei tre elementi E_2 di $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ in O non esauriscono gli invarianti del 2° ordine del reticolo: infatti dallo stesso ordine dipendono le direzioni (di spazio rigato) in O delle rigate di tangenti alle linee Γ_r ($r=1, 2, 3$) che escono dai punti di una linea Γ passante per O . Ossia, con linguaggio infinitesimale: gli E_1 delle linee del reticolo che escono dagli estremi degli E_1 uscenti da O . Ad es. è naturale considerare, fra le direzioni delle rigate di tangenti (ad es.) alle linee Γ_3 , le *direzioni singolari*, appartenenti a *rigate sviluppabili*. Troviamo subito ⁽²⁰⁾ che le direzioni delle direttrici di rigate sviluppabili di tangenti t_3 in O formano il cono quadrico

$$(6.1) \quad \Pi_{3r}^2(du)^r dv - \Pi_{3r}^4(du)^r dv = 0.$$

In particolare sul piano π_{12} tangente in O a σ_{12} avremo una coppia di direzioni di linee segnate su σ_{12} da rigate sviluppabili (appartenenti al complesso delle tangenti t_3): che rappresenteremo ponendo nella (6.1) $dv=0$. Queste linee formeranno su σ_{12} un sistema coniugato — cioè: il complesso K_3 delle tangenti t_3 alle linee Γ_3

⁽¹⁹⁾ Naturalmente anche qui non sarà da eseguire la somma.

⁽²⁰⁾ Ved. la Nota, *Varietà anolonomie associate ad una trasformazione dualistica*, di A. MAXIA (in corso di pubblicazione nei « Rendiconti Istituto Lombardo »).

è coniugato alla superficie anolonoma σ_{12} ⁽²¹⁾ — a condizione che si abbia

$$(6.2) \quad \left\{ 2\Pi_{31}^2 \Pi_{22}^3 - (\Pi_{32}^2 - \Pi_{31}^4)(\Pi_{12}^3 + \Pi_{21}^3) - 2\Pi_{32}^4 \Pi_{11}^3 \right\}^2 = \\ = (\Pi_{12}^3 - \Pi_{21}^3)^2 \left\{ (\Pi_{32}^2 - \Pi_{31}^4)^2 + 4\Pi_{32}^4 \Pi_{31}^2 \right\}^2 \quad (22).$$

Il sistema delle linee segnate su σ_{12} dalle sviluppabili di K_3 può in particolare essere costituito dalle stesse linee Γ_1 e Γ_2 : condizione per questo è che sia

$$(6.3) \quad \Pi_{31}^2 = 0, \quad \Pi_{32}^4 = 0.$$

Se vogliamo, di più, che le linee Γ_1 siano coniugate alle Γ_2 , o viceversa, dovremo aggiungere la condizione

$$(6.4) \quad \Pi_{12}^3 = 0, \quad \text{oppure} \quad \Pi_{21}^3 = 0.$$

Queste relazioni di coniugio però non possono essere involutorie che su superficie olonome: cosicchè *il reticolo sarà un sistema triplo coniugato, ma necessariamente formato da famiglie di ordinarie superficie, a condizione che si annullino tutte le Π_{st}^r corrispondenti a tre valori differenti dei tre indici.*

7. Indichiamo ora con $*y_1$ un punto prossimo ad O , cioè ad y , sulla linea $*\Gamma_1$ della congruenza (Γ_1) uscente da un punto infinitamente vicino ad O , sulla linea Γ_3 che esce da O . Formiamo il

birappporto $yz_3(z_1 z_2 *y, y_3)$; la sua parte principale è $\frac{1}{2} \frac{\Pi_{13}^2 \Pi_{23}^4}{\Pi_{33}^2} dw$.

In modo assolutamente analogo abbiamo altri cinque consimili invarianti. Su questo non ci tratteremo.

Riprendiamo invece la retta (4.1), corrispondente alla retta che esce da O con la direzione $(du)^r$ nella *proiettività di cella* per σ_{12} . Su questa retta indichiamo con x_1, x_2 i punti in cui essa è intersecata dalle tangenti alle linee Γ_1, Γ_2 uscenti dal punto \widehat{y} , infinitamente vicino ad y nella direzione $(du)^r$. Il birappporto formato da

⁽²¹⁾ Veramente, in quanto ci si limiti a considerare in esso le rigate che hanno le loro direttrici su σ_{12} , tale complesso è piuttosto da riguardarsi come *una congruenza anolonoma di rette.*

⁽²²⁾ Ci riferiamo qui al *coniugio* nel senso precisato al n. 4; che se σ_{12} non è olonoma non è il coniugio rispetto alla coppia di *direzioni asintotiche* di σ_{12} . La condizione perchè K_3 sia coniugato a σ_{12} *rispetto alle asintotiche* (« *pseudoconiugato* ») si ha dalla (6.2) sostituendo al secondo membro lo zero.

questi due punti con quelli in cui la loro congiungente interseca t_1 e t_2 è dato da

$$(7.1) \quad y(x_1, x_2, z_1, z_2) = \frac{(\Pi_{2r}^3 du - \Pi_{2r}^4 dv)(\Pi_{1s}^3 dv - \Pi_{1s}^2 dw)(du)^r (dv)^s}{dw^2}.$$

Altri due analoghi invarianti si otterranno per σ_{12} e σ_{31} . Ma fermiamoci sul caso particolare in cui $du = 0$, $dv = 0$, cioè \bar{y} sta sulla linea Γ_3 che esce da O . L'invariante precedente allora si riduce a $\Pi_{23}^4 \Pi_{13}^2 dw^2$, e la retta (4.1) a $z^0 + \Pi_{13}^3 z^1 + \Pi_{23}^3 z^2 = 0$; indichiamo ora questa retta con r_{12} e con P_{31} , P_{32} i punti in cui essa incontra le rette t_1 e t_2 . Avremo analogamente sui piani π_{22} , π_{31} due rette r_{23} , r_{31} , di equazioni $z^0 + \Pi_{21}^4 z^2 + \Pi_{31}^4 z^3 = 0$, $z^0 + \Pi_{32}^2 z^2 + \Pi_{12}^2 z^1 = 0$; le quali rispettivamente intersecheranno t_2 e t_3 ; t_3 e t_1 in punti che indicheremo con P_{12} , P_{13} ; P_{23} , P_{21} . Limitiamoci a considerare il caso in cui i punti P_{21} e P_{31} ; P_{32} e P_{12} ; P_{13} e P_{23} su t_1 , t_2 , t_3 risultano *distinti*. Allora il passaggio per r_{12} , r_{23} , r_{31} determina una quadrica invariante, legata al punto O e non passante per esso; tangente ai piani π_{12} , π_{23} , π_{31} nei punti in cui le rette r_{12} , r_{23} , r_{31} intersecano $s_{12} = P_{12}P_{21}$, $s_{23} = P_{23}P_{32}$, $s_{31} = P_{31}P_{13}$. L'equazione di questa quadrica Q è:

$$(7.2) \quad (z^0)^2 + (\Pi_{12}^2 + \Pi_{13}^3)z^0 z^1 + (\Pi_{21}^4 + \Pi_{23}^3)z^0 z^2 + (\Pi_{32}^2 + \Pi_{31}^4)z^0 z^3 + \\ + \Pi_{12}^2 \Pi_{13}^3 (z^1)^2 + \Pi_{21}^4 \Pi_{23}^3 (z^2)^2 + \Pi_{32}^2 \Pi_{31}^4 (z^3)^2 + \\ + (\Pi_{13}^3 \Pi_{21}^4 + \Pi_{23}^3 \Pi_{12}^2)z^1 z^2 + (\Pi_{13}^3 \Pi_{32}^2 + \Pi_{12}^2 \Pi_{31}^4)z^1 z^3 + \\ + (\Pi_{21}^4 \Pi_{32}^2 + \Pi_{31}^4 \Pi_{23}^3)z^2 z^3 = 0.$$

Sarà naturale prendere quale piano opposto ad y (piano $\tau \equiv BB_1 B_2 B_3$) nel riferimento locale il piano polare di y rispetto a questa quadrica (è quanto fa anche, senza venire alla considerazione della quadrica in parola, il FUBINI): questo porta

$$(7.3) \quad \Pi_{12}^2 + \Pi_{13}^3 = 0, \quad \Pi_{21}^4 + \Pi_{23}^3 = 0, \quad \Pi_{32}^2 + \Pi_{31}^4 = 0.$$

Vi è poi una e una sola retta uscente da O , che ha lo stesso piano polare rispetto al triedro $t_1 t_2 t_3$ e al cono circoscritto da O alla quadrica Q : essa è la retta

$$(7.4) \quad \frac{z^1}{(\Pi_{31}^4 - \Pi_{32}^2)(\Pi_{23}^3 - \Pi_{21}^4)} = \frac{z^2}{(\Pi_{12}^2 - \Pi_{13}^3)(\Pi_{31}^4 - \Pi_{32}^2)} = \\ = \frac{z^3}{(\Pi_{23}^3 - \Pi_{21}^4)(\Pi_{12}^2 - \Pi_{13}^3)}.$$

Preso il punto unità del riferimento locale su questa retta, ad es. in una delle sue intersezioni con la quadrica Q (il che però potrà farsi solo uscendo dal campo reale) sono soddisfatte le relazioni $\Pi_{12}^2 - \Pi_{13}^3 - \Pi_{23}^3 - \Pi_{21}^4 = \Pi_{34}^4 - \Pi_{32}^2 = h$; l'ultima condizione dà $h = \pm \frac{2i}{\sqrt{3}}$. A questo modo viene completamente deter-

minato, in relazione a ciascun punto O , il corrispondente riferimento locale B_λ^x e risultano anche determinati i valori dei para-

metri Π_{sr}^r per $r \neq s$ ⁽²³⁾. Ma risulta anche determinata per S_3 , in modo intrinsecamente legato al reticolo supposto, una metrica riemanniana (a ds^2 indefinito): la quale ha in ciascun punto O il piano $z^0 = 0$ del riferimento locale intrinseco ora detto quale piano improprio locale; il cono circoscritto da O alla quadrica Q come cono isotropo e la quadrica Q medesima quale sfera di raggio 1 col centro in O . Introdotta questa metrica intrinseca e proiettivamente invariante la ricerca delle ulteriori proprietà proiettive del reticolo viene ricondotta nel campo metrico.

Rispetto alla metrica ora detta la terna di congruenze ha questa particolarità: che le tangenti in ciascun punto alle tre linee delle tre congruenze che ne escono formano un triedro circoscritto all'assoluto. Ci limitiamo a indicare una prima applicazione della metrica intrinseca: rispetto ad essa gli elementi d'arco delle tre linee $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ in O sono le tre forme invarianti ⁽²⁴⁾

$$(7.5) \quad (\Pi_{13}^3 - \Pi_{12}^2)du, \quad (\Pi_{24}^4 - \Pi_{23}^3)dv, \quad (\Pi_{32}^2 - \Pi_{31}^4)dw.$$

cosicchè la scelta poco sopra accennata del punto unità equivale in sostanza ad assumere proprio quegli elementi d'arco quali pfaffiani du, dv, dw : anche per questo riguardo ci si riporta dunque alla teoria metrica di RICCI e LEVI-CIVITA per le n -uple ortogonali.

⁽²³⁾ Per finire di determinare tutti gli altri parametri bisogna: o completare la normalizzazione delle B_λ^x ad es. con la condizione che prenda il valore 1 il determinante $|B_\lambda^x|$ (cfr. FUBINI, loc. cit., p. 17); oppure valersi di una derivazione covariante, quale è introdotta nei miei lavori già cit. *Superficie anolonome complementari* (p. 559) e *Sulla geometria proiettiva differenziale delle trasformazioni dualistiche* (p. 226).

⁽²⁴⁾ Per via analitica ha ottenuto queste forme anche il FUBINI (loc. cit., p. 10). Notiamo che le distanze infinitesime sulle rette uscenti da O sono anche distanze nella metrica non-euclidea che ha Q come assoluto.