UMI

Sunti di lavori Italiani

* Lavori di: Luigi Berzolari

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2, Vol. **1** (1939), n.4, p. 384–386.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_4_384_0>

SUNTI DI LAVORI ITALIANI

LUIGI BERZOLARI: *Sulla configurazione determinata da due cubiche sghembe in posizione ottaedrica* (in corso di stampa nelle « Memorie della R. Accademia Nazionale dei Lincei »).

Tra i gruppi finiti di collineazioni dello spazio ordinario presentano particolare interesse, soprattutto nell'aspetto geometrico, quelli che sono dotati di cubiche sghembe invarianti: in ispecie i due che tra i cinque tipi di gruppi ottaedrici oppure icosaedrici risultano appunto caratterizzati dalla presenza di tali cubiche, e dànno luogo a notevoli configurazioni.

L'uno e l'altro di codesti gruppi possiede due, e due sole, cubiche sghembe invarianti, e di una siffatta coppia di cubiche « in posizione ottaedrica », oppure « in posizione icosaedrica », G. KOHN (1) enunciò, senza dimostrazione, parecchie eleganti proprietà (2), accennando pure ad estensioni di cui ciascuno dei due gruppi è suscettibile.

Per due cubiche in posizione ottaedrica, il gruppo G_{24} delle collineazioni che trasformano in sè così l'una come l'altra curva fu studiato da E. CIANI (3), il quale prese altresì in esame le superficie del 4° ordine invarianti rispetto al gruppo (4).

(1) « Sitzungsb. der K. Akad. der Wiss. in Wien », 108, II-a (1899), p. 58.

(2) Un teorema che caratterizza la posizione ottaedrica di due cubiche sghembe fu dimostrato dallo stesso KOHN, « Math. Ann. », 52 (1899), p. 293.

(3) « Rend. del Circolo Matematico di Palermo », 16 (1902), p. 327.

Un problema che conduce alla considerazione di due cubiche in posizione ottaedrica è quello della determinazione delle configurazioni di 10 punti e 15 piani, tali che per ognuno dei punti passino sei dei piani e su ognuno dei piani giacciano quattro dei punti. Cfr. una mia Nota in « Rend. del R. Istituto Lombardo », (2), 51 (1917-18), p. 243.

(4) Dal CIANI, « Annali di Matematica », (3), 8 (1903), p. 1, fu pure studiato il gruppo icosaedrico, dopo aver eseguito per via geometrica la determinazione dei gruppi finiti di collineazioni quaternarie oloedricamente isomorfi con i gruppi di rotazioni dei poliedri regolari. Questa

Ma, come apparirà dal lavoro che qui si riassume, l'argomento consente ulteriori sviluppi, forse non privi d'interesse, con l'intervento di numerosi enti, che, quantunque intimamente collegati con la configurazione determinata dalle due cubiche, soltanto in piccola parte sono stati sinora considerati. Spiccano tra essi, ed hanno ufficio particolarmente rilevante nello studio della configurazione, il complesso lineare K_0 contenente tutte le tangenti delle date cubiche, e altri tre complessi lineari K_1, K_2, K_3 involutori al precedente e a due a due tra loro, inoltre le quattro quadriche, su cui sono tracciate le schiere rigate intersezioni di quei complessi a tre a tre.

Il lavoro è diviso in quattro parti. Stabilite nella prima molte proprietà di due cubiche in posizione ottaedrica, si studia nella seconda non soltanto il gruppo G_{24}, ma pure il G_{48} che si ottiene aggiungendo a quello le collineazioni che mutano le due curve l'una nell'altra, e altresì il gruppo misto G_{96} che risulta aggiungendo alle precedenti collineazioni le correlazioni che trasformano ognuna delle due curve nella sviluppabile dei propri piani osculatori, oppure nella sviluppabile dei piani osculatori dell'altra.

La terza parte è dedicata ad alcune superficie del 4° ordine invarianti rispetto al G_{24}, ma, con maggior diffusione, a quelle di esse che sono invarianti rispetto al gruppo G_{48}, e particolarmente ad alcune desmiche (tra loro proiettivamente identiche) prive di punti multipli.

Una di queste possiede 54 rette, disposte in sistemi invarianti di 2, 6, 6, 16 e 24, e aventi tra loro legami assai notevoli.

La coppia invariante consta delle rette comuni ai complessi K_0, K_1, K_2, K_3. L'una sestupla, ma non l'altra (formata questa dalle tangenti comuni alle date cubiche), si compone di rette appoggiate alla coppia invariante.

Il sistema delle 16 comprende le intersezioni delle facce di due tetraedri di Möbius. Ma esistono altri 24 piani, ognuno dei quali incontra la superficie in quattro rette: di queste rette tre formano fascio, due di esse essendo tra le 24 e la terza appartenendo alla prima delle anzidette sestuple, mentre l'ulteriore retta contenuta nel piano appartiene all'altra sestupla.

I centri e i piani dei 24 fasci si distribuiscono *in due diversi*

determinazione rientra in una più generale che era stata compiuta per via analitica da H. Maschke, « Math. Ann. », 51 (1899), p. 253.

I gruppi finiti di collineazioni quaternarie che si possono mettere sotto forma reale furono assegnati da G. Bagnera, « Rend. del Circolo Matematico di Palermo », 15 (1901), p. 161.

modi, nei vertici e nelle facce di tre coppie di tetraedri di MÖBIUS. I 24 punti giacciono a quattro a quattro sulle rette della prima sestupla invariante, formando ogni volta un gruppo armonico; i 24 piani passano a quattro a quattro per le rette dell'altra sestupla, formando pure un gruppo armonico, ecc..

L'ultima parte si riferisce a due sistemi di ∞^1 cubiche sghembe, che si deducono dalle due primitive, e sono tracciate su due rigate razionali del 6° grado, aventi come direttrici triple le rette della coppia invariante. Le cubiche dei due sistemi giacciono tutte con le loro tangenti nel complesso K_0; ognuna è in posizione ottaedrica con un'altra ben determinata del sistema a cui essa appartiene, e con tre dell'altro sistema.

Le corde delle cubiche dei due sistemi generano due complessi del 4° grado. Ma le loro tangenti costituiscono un'unica congruenza [5] contenente ∞^1 schiere rigate, che è l'intersezione di K_0 con un particolare complesso del 4° grado, determinato da K_1, K_2, K_3, del quale ho indicato le principali proprietà in alcune Note di varî anni or sono [6].

(5) Per quanto so, sinora è stato esplicitamente rilevato un solo caso, in cui le sviluppabili di una congruenza abbiano per spigoli di regresso cubiche sghembe. V. la Memoria premiata di E. J. WILCZYNSKI, « Mém. (in 4°) de l'Acad. royale de Belgique », (2), 3 (1912), Mém. n. 5. Nel § 11 l'A. studia le congruenze appartenenti a un complesso lineare, le cui trasformate di LAPLACE appartengono ancora a un complesso lineare, e in un certo caso particolare, appena accennato, trova che le curve inviluppate dalla congruenza su ciascuna delle due falde focali sono cubiche sghembe.

(6) « Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei », (5), 31_1 (1922), pp. 421, 446, 489; (5), 31_2 (1922), p. 5.