
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ETTORE BORTOLOTTI

I primi algoritmi infiniti nelle opere del matematici italiani del secolo XVII

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2,
Vol. 1 (1939), n.4, p. 352-372.

Unione Matematica Italiana

<[http:](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_4_352_0)
[//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_4_352_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_4_352_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

SEZIONE STORICO-DIDATTICA

PICCOLE NOTE

I primi algoritmi infiniti nelle opere dei matematici italiani del secolo XVII (*).

Nota di ETTORE BORTOLOTTI (a Bologna).

Sunto. - *Lo sviluppo in serie di irrazionalità quadratiche, e la scoperta delle frazioni continue* (P. A. CATALDI). *La somma di serie infinite* (E. TORRICELLI, P. MENGOLI).

1. Nello stesso tempo in cui la geometria metrica iniziava una nuova fase di sviluppo con la introduzione del concetto di limite, nel vecchio tronco della logistica il medesimo concetto innestava un nuovo ramo, che ha dato alla scienza frutti prodigiosi.

Il *passaggio dal finito all'infinito*, creava infatti le *serie*, le *frazioni continue*, i *prodotti infiniti*, che sono gli elementi costitutivi dell'analisi moderna.

2. I più antichi trattati di aritmetica pratica (logistica), dopo aver dato la regola per il calcolo della parte intera a della radice quadrata di un numero $N = a^2 + r$, insegnano a calcolare rapidamente una radice assai prossima con regole empiriche che conducono ad una delle due formule:

$$a + \frac{N - a^2}{2a}, \quad a + \frac{N - a^2}{2a + 1}.$$

La prima di esse corrisponde al calcolo della *media aritmetica fra il valore a e quello approssimato in senso opposto N/a* . Si verifica difatti immediatamente la identità:

$$1/2(a + N/a) = a + (N - a^2)/2a.$$

(*) Questa Nota fa seguito a quelle da me pubblicate nei fascicoli I e III di questo volume alle pp. 47-60, 275-286.

Corrisponde anche alla *formula di Newton pel calcolo approssimato* della radice positiva della equazione $f(x) = N - x^2 = 0$. Partendo dal valore prossimo $x_1 = a$, si ha infatti

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} = a + \frac{N - a^2}{2a}.$$

La seconda formula corrisponde ad una *interpolazione lineare* cioè alla antica *regola di doppia falsa posizione*.

Se infatti si pone:

$$x = a^2 + r, \quad x_1 = a^2, \quad x_2 = (a + 1)^2;$$

$$y = \sqrt{a^2 + r}, \quad y_1 = \sqrt{a^2} = a, \quad y_2 = \sqrt{(a + 1)^2} = a + 1,$$

nella formula:

$$y = y_1 + (y_2 - y_1) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

si ha:

$$\sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a + 1}.$$

3. Lo studio di tali mezzi di approssimazione per il calcolo di radici (anche di indice qualunque), era stato posto in primo piano dalla disputa fra TARTAGLIA e FERRARI. I quesiti 22, 23, 24, 25, proposti dal TARTAGLIA nel suo 2° Cartello, richiedono appunto regola pratica al calcolo approssimato di radici degli indici 5°, 6°, 7°, 8°, di particolari numeri proposti.

E, sul modo tenuto per tale approssimazione, furono lunghe ed aspre contese.

Anche BOMBELLI, nella sua *Algebra* (1), se ne è occupato, ed ha dato elegante dimostrazione della formula $a + (N - a^2)/2a$, con procedimento che avrebbe potuto condurre alla frazione continua, se il BOMBELLI avesse avuto preventiva cognizione di quel particolare algoritmo, che è la *frazione continua*.

Ma nè lui, nè altri, aveva ancora mai pensato ad una tal specie di operazioni aritmetiche.

Non si ha infatti esempio in tutta la letteratura matematica antica e medioevale, anteriore al 1613, nè di una espressione numerica della forma:

$$a + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \dots}}$$

(1) Cfr. *L'Algebra*, opera di RAFAEL BOMBELLI da Bologna, (Bologna 1572), pp. 35, 37. Cfr. ETTORE BORTOLOTTI, *La scoperta delle frazioni continue*, Bollettino della « Mathesis », anno XI, agosto 1919.

nè della catena di divisioni successive indicate con tale espressione.

4. Le frazioni continue sono il risultato finale di una serie di ricerche fatte da PIETRO ANTONIO CATALDI, lettore « *ad Mathematicam* » nell'Università di Bologna negli anni dal 1583 al 1627, per la determinazione del modo più rapido, più semplice e più sicuro, pel calcolo approssimato della radice quadra dei numeri ⁽²⁾.

Egli si sforza dapprima di giustificare ed estendere i procedimenti empirici usati ab antiquo, e studia l'operazione risultante dalla indefinita iterazione di essi: Vede che il valor prossimo può rappresentarsi come somma di termini, il cui numero va indefinitamente crescendo per successiva aggiunta di un nuovo termine, atto a correggere e migliorare la somma degli antecedenti. Ha in vista *la rappresentazione del valore esatto come somma di infiniti termini*, e, benchè non rappresenti formalmente una tale somma infinita, ne dà effettiva determinazione collo stabilire la legge di formazione di ogni termine dal precedente; ed, *egli per primo*, dà *la legge degli errori*, cioè della convergenza della serie trovata, col dare regola opportuna al *calcolo della differenza fra il quadrato della somma dei primi n termini ed il dato numero N*, di cui si cerca la radice, *senza che occorra quadrare la somma trovata*.

Considera poi le possibili generalizzazioni dei procedimenti antichi, e si propone di *determinare quello, fra tutti, che dà la massima approssimazione col minor travaglio*, cioè il « modo brevissimo di trovare la radice quadra dei numeri »: *per tal modo riesce a scuoprire la frazione continua*, insegna a costruirla e ne trova tutte le fondamentali proprietà formali.

5. Osserva anzitutto che *la espressione* $a_0 + \frac{N - a_0^2}{2a_0} = a_1$ *è sempre radice eccedente del numero N, sia la* a_0 *che quantità si voglia (positiva) e che se colla radice trovata si forma una nuova radice*

$$a_2 = a_1 - \frac{a_1^2 - N}{2a_1}$$

la quale si scriverà

$$a_0 + \frac{N - a_0^2}{2a_0} - \frac{a_1^2 - N}{2a_1} = a_2$$

⁽²⁾ Cfr. PIETRO ANTONIO CATALDI, *Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadra delli numeri*, in Bologna appresso Bartolomeo Cochi, MDCXIII.

od anche:

$$a_2 = a_0 + \frac{r_0}{2a_0} - \frac{r_1}{2a_1},$$

essendo:

$$r_0 = N - a_0^2, \quad r_1 = a_1^2 - N;$$

e se si continua così operando su questa seconda radice, e poi su la terza che da lei si ottiene... « e così dell'altre quanto si piacesse, « le radici:

$$(1) \quad a_n = a_0 + \frac{r_0}{2a_0} - \frac{r_1}{2a_1} - \frac{r_2}{2a_2} - \dots - \frac{r_{n-1}}{2a_{n-1}}$$

« che per tal modo si formano sono tutte eccedenti, e sempre più « propinque, essendo l'eccesso del quadrato della radice trovata sul « dato numero, eguale al quadrato della quantità, che si cava dalla « radice precedente per formare quella che si considera ».

Si ha infatti, qualunque sia il numero (positivo) a_0 ,

$$\left\{ \begin{aligned} a_1 &= a_0 + \frac{N - a_0^2}{2a_0} = a_0 - \frac{a_0^2 - N}{2a_0} = \frac{1}{2a_0} (a_0^2 + N) \\ r_1 &= a_1^2 - N = \frac{1}{4a_0^2} [(a_0^2 + N)^2 - 4a_0^2 N] = \frac{(a_0^2 - N)^2}{4a_0^2} = \left(\frac{r_0}{2a_0} \right)^2 \end{aligned} \right.$$

e così anche:

$$\begin{aligned} r_n &= a_n^2 - N = \frac{1}{4a_{n-1}^2} [(a_{n-1}^2 + N)^2 - 4a_{n-1}^2 N] = \\ &= \frac{1}{4a_{n-1}^2} (a_{n-1}^2 - N)^2 = \left(\frac{r_{n-1}}{2a_{n-1}} \right)^2. \end{aligned}$$

Dalla relazione $r_n = \frac{r_{n-1}^2}{4a_{n-1}^2}$ si ricava: $\frac{r_n}{r_{n-1}} = \frac{r_{n-1}}{4a_{n-1}}$, ma è:

$$r_{n-1} = a_{n-1}^2 - N, \quad n = 2, 3, \dots, \quad \text{onde:} \quad \frac{r_n}{r_{n-1}} < \frac{1}{4}.$$

Da cui si vede che la differenza $r_n = a_n^2 - N$ tende rapidamente allo zero, e la somma a_n dei primi $n + 1$ termini della serie (1) tende rapidamente alla radice di N , qualunque sia il valore assegnato al primo termine a_0 (3). Questo fatto si verifica immediatamente dall'esame della figura che interpreta geometricamente il metodo di approssimazione di NEWTON, di cui la formula $a_1 = a_0 + \frac{N - a_0^2}{2a_0}$

(3) V. la Risposta, data da L. ONOFRI ad analoga *Questione*, a p. 188 di questo Periodico.

è immediata applicazione; ma la scoperta di questo fatto, veramente inaspettato, è dovuta al CATALDI.

6. Analoghe considerazioni fa il CATALDI per la serie della forma:

$$a + \frac{r}{2a+1} + \frac{r_1}{2a_1+1} + \frac{r_2}{2a_2+1} + \dots$$

e per quelle più generali della forma:

$$a + \frac{r}{a+b} + \frac{r_1}{a_1+b} + \frac{r_2}{a_2+b} + \dots$$

a , radice scarsa, b , eccedente.

$$a_1 = a + r/a + b, \dots, \quad a_n = a_{n-1} + \frac{r_{n-1}}{a_{n-1} + b}, \quad r_n = N - a_n^2$$

che avvicinano per valori, tutti scarsi, alla radice quadrata del numero $N = a^2 + r$.

Il CATALDI ha osservato che c'è arbitrarità nella scelta del valore da dare a b nel procedimento indicato, e che alle diverse scelte corrispondono diverse rapidità nella tendenza al valor vero della radice. E ciò lo porta allo studio generale del Problema: *Dato il numero N e prese due radici prossime a, b ; formare con queste una terza radice c mediante l'operazione $c = a + (N - a^2)/(a + b)$, e stabilire la relazione fra c^2 , ed N .*

Trova che il difetto o l'eccesso del quadrato del terzo numero così formato, al proposto, è eguale al prodotto delle due differenze che sono fra esso numero trovato ed il primo, e fra il secondo ed il terzo. Cioè che $N - c^2 = (c - a)(c - b)$.

Dunque l'errore sarà tanto più piccolo quanto più il numero calcolato c si approssima ad uno dei due a, b , sui quali si è fatta l'operazione.

Siamo qui tentati di osservare che, se il CATALDI avesse fatto la riflessione che se il numero c coincide con uno dei dati numeri, (per es. con b) la differenza diventa nulla ed il valore $c = b$ è radice esatta, avrebbe ottenuto la formula:

$$\sqrt{N} = c = a + \frac{N - a^2}{a + c} = a + \frac{N - a^2}{2a + \frac{N - a^2}{a + c}} = \dots$$

e questa lo avrebbe potuto guidare alla scoperta della frazione continua (se avesse avuto preventiva nozione della frazione continua!). Ad ogni modo una tale deduzione sarebbe parsa strana a CATALDI, perchè, fra altro, a quei tempi si rifuggiva dall'ammettere rap-

presentazione, con simbolo numerico, della radice di un numero non quadrato. Perciò, se pure ebbe fin d'allora l'idea della frazione continua, cercò poi di fondarla su più solidi principi.

A tal fine ha indicato il valore prossimo della radice del numero $N = a^2 + r$, colla espressione $a + \frac{r}{2a + x}$, e si è proposto di trovare, con regola generale, quanto il quadrato della radice prossima $a + \frac{r}{2a + \frac{p}{q}}$ formata col porre un numero determinato p/q al

posto di x , è maggiore o minore del dovere, senza quadrare la radice.

Ha indicato col nome di *Rotto aggiunto* la frazione p/q , che va posta al luogo di x ; di *Rotto totale*, la frazione risultante

$\frac{r}{2a + \frac{p}{q}}$ ed ha, in particolare, trovato che: « la radice prossima ri-

sultante $a + \frac{r}{2a + \frac{p}{q}}$ sarà scarsa od eccedente, secondo che il rotto aggiunto era eccedente o scarso ».

Ora, poichè il rotto $p/q = r/2a$, è eccedente, da esso ricaveremo un rotto scarso: $\frac{r}{2a + \frac{r}{2a}}$, ed essendo questo scarso, sarà eccedente

il terzo da esso generato:

$$\frac{r}{2a + \frac{r}{2a + \frac{r}{2a}}}$$

e questo terzo ne produrrà un quarto scarso:

$$\frac{r}{2a + \frac{r}{2a + \frac{r}{2a + \frac{r}{2a}}}}$$

e, così sempre.

Dunque il rotto (noi diciamo la ridotta) di ordine n , si ricava da quello di ordine $n - 1$ mediante la formula $\frac{p_n}{q_n} = \frac{r}{2a + \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}}$ e se

la p_{n-1}/q_{n-1} è eccedente o scarsa, la p_n/q_n sarà scarsa od eccedente.

7. Con questo procedimento di classica eleganza, e di perfetta correttezza logica, il CATALDI ha dunque, non solo scoperto e costruito la frazione continua, ma ha anche dato modo di trovare immediatamente la relazione fra due ridotte consecutive, dalla quale tutte le proprietà formali di quell'algoritmo immediatamente si derivano.

Egli ha infatti trovato tali proprietà, nei riguardi delle frazioni continue da lui studiate (4), ed ha inoltre *paragonato la relativa rapidità di convergenza al valor vero, della frazione continua e delle serie precedentemente studiate*. Ha visto che *le serie che danno valori scarsi, riproducono tutte le ridotte di ordine pari della frazione continua; quelle che danno valori eccedenti solo alcune di quelle di ordine dispari, e cioè la 1^a, 3^a, 7^a,... 2ⁿ - 1,...* Nessuna può da sola generare tutte le ridotte. Cosicché, *gli antichi procedimenti per il calcolo approssimato della radice quadra dei numeri, non avrebbero potuto immediatamente condurre alla scoperta della frazione continua* (5).

(4) Dalla legge di formazione:

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{r}{2a + \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}}$$

scendono immediatamente le formule: $p_n = r q_{n-1}$, $q_n = 2a q_{n-1} + p_{n-1}$ che CATALDI usa di continuo, ed anche le altre: $p_n = 2a p_{n-1} + r p_{n-2}$, $q_n = 2a q_{n-1} + r q_{n-2}$ che danno la *legge di ricorrenza* (l'equazione alle differenze finite), da cui derivano tutte le proprietà formali delle frazioni continue. In particolare CATALDI trova la formula fondamentale $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n r^n$, d'onde la espressione:

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = (-1)^n \frac{r^n}{q_n q_{n-1}}$$

per la differenza fra due ridotte consecutive, che dà un limite superiore dell'errore di approssimazione al valore vero.

(5) Quando il matematico e storico F. WOEPCKE rinvenne in un autore arabo del secolo XV la indicazione delle due approssimazioni:

$$a_1 = a + \frac{N - a^2}{2a}, \quad a_2 = a_1 + \frac{N - a_1^2}{2a_1},$$

non mancò di far rilevare la identità di questi valori colla prima e terza ridotta della frazione continua di CATALDI. Questa osservazione indusse taluno a ritenere che la frazione continua di CATALDI potesse essere ricavata dalla iterazione di quell'antico procedimento di approssimazione (v. p. es, LORIA, *Storia delle Matematiche*, vol. II, (1931), p. 217) e da ciò dedurre che « *gli arabi conobbero ed usarono le frazioni continue* ». Il principe BONCOMPAGNI fece pubblicare nei « *Nouvelles Annales* » (t. XII) la seguente domanda: « *On sait que, si a_1 est une valeur ap-*

8. Le serie infinite studiate dal CATALDI per il calcolo di radicali quadratici e la frazione continua da lui genialmente costruita, introdussero nel campo numerico, squisitamente discontinuo, idee e metodi prima d'allora riservati alla determinazione delle aree e dei volumi nel campo geometrico, essenzialmente continuo.

L'irrazionale, inesprimibile con numero, figura come elemento di separazione fra le somme sempre crescenti delle serie scarse e quelle sempre decrescenti delle eccedenti; nello stesso modo che l'area del cerchio figura come elemento di separazione fra le aree dei poligoni inscritti e quelle dei circoscritti. Ed alla determinazione della differenza evanescente fra le aree dei poligoni inscritti (o circoscritti) e quella del cerchio da determinare, corrisponde nella trattazione di CATALDI, quella dell'errore che si commette assumendo per valore prossimo la somma di un determinato numero di termini di una delle due *serie di Cataldi*, od

prochée de \sqrt{N} , $a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{N}{a_1}\right)$, $a_3 = \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{N}{a_2}\right)$,... , seront des valeurs de plus en plus approchées de N . On sait aussi que

$$\sqrt{a_1^2 + r} = a_1 + \frac{r}{2a_1 + \frac{r}{2a_1 + \dots}}$$

On demande: A quels quotients il faudra s'arrêter dans le second membre de cette même équation pour avoir a_3 , a_4 ,... ou bien de quelle manière on peut démontrer que les valeurs a_3 , a_4 ,... ne sont pas compris dans l'expression

$$a_1 + \frac{r}{2a_1 + \frac{r}{2a_1 + \dots}}$$

La risposta era già stata data, come s'è detto, dal CATALDI, ma nessuno pensò di consultare quel vecchio autore, e parecchi si affaticarono per giungere a quel medesimo risultamento, il quale fu dato dapprima con qualche imprecisione e senza soddisfacente dimostrazione; fu poi dimostrato, ma sempre ricorrendo a teorie ed a metodi sconosciuti al tempo di CATALDI.

Su questo argomento, come pure sul contenuto effettivo dell'opera di CATALDI, si possono vedere le note: ETTORE BORTOLOTTI, *Le antiche regole empiriche pel calcolo approssimato dei radicali quadratici, e le prime serie infinite*, « Bollettino della Mathesis », anno XI, 1919, pp. 14-19; *La scoperta delle frazioni continue*, ibidem., pp. 102-123; *La storia dei presunti scopritori delle frazioni continue*, ibidem., pp. 157-183. Cfr. anche: ETTORE BORTOLOTTI, *La scoperta dell'irrazionale, e le frazioni continue*, « Periodico di Matematiche », serie IV, vol. XI, 1931, pp. 133-148.

una speciale ridotta della sua frazione continua; ed anche CATALDI dimostra che quell'errore può farsi piccolo a piacere.

Che più mancava per la introduzione nel campo aritmetico del concetto di limite, che già si era affacciato nel campo geometrico? Mancava l'attribuzione al corpo numerico del valore vero, inespri- mibile delle radici quadre di numeri non quadrati, ... Il passaggio al limite non poteva, in quei primi tempi, essere concepito senza la preventiva cognizione della grandezza cui i termini di una successione infinita indefinitamente si accostano, senza mai poterla raggiungere.

Ma, soprattutto mancava, o non era ancora sufficientemente chiaro, il concetto di *infinito attuale*, nella comprensione unitaria di un procedimento che la mente vede continuato oltre lo scritto all'infinito.

Concetto che GALILEO esprime eloquentemente quando, parlando delle infinite divisioni nella dicotomia eleatica, dice: « niuna « di tali divisioni essere ultima, ma ben l'ultima ed altissima « esser quella che lo risolve in infiniti indivisibili, alla quale si « perverebbe nella maniera che propongo io: *distinguere e risolvere « tutte le infinite in un tratto solo* ».

Ed invero non oserei affermare che CATALDI, con un tratto solo si rappresentasse l'irrazionale quadratico, come identificato nella totalità dei termini di una delle sue serie, o nell'ultima ridotta della sua frazione continua. Nello stesso modo che, nelle quadrature archimedee, il cerchio non può dirsi considerato come poligono di infiniti lati.

Ma si può ben dire che lo studio di serie infinite e la scoperta della frazione continua infinita, hanno aperto un gran varco per l'infinito nel campo numerico, prima d'allora chiuso a tali indagini; poichè, dopo un periodo relativamente breve di incubazione, vediamo le serie, le frazioni continue, i prodotti infiniti apparire quasi contemporaneamente nelle opere dei maggiori matematici di quel tempo.

9. Le idee erano infatti già rivolte verso i nuovi indirizzi: le prolisse dimostrazioni per exhaustion sono buttate da parte con indicibile sollievo, ed è una gara nel rifare al modo moderno la matematica antica. Sono di quel tempo le interpolazioni, e le contaminazioni delle proposizioni e dei testi euclidei ed archimedei, coi nuovi concetti di infinito e di limite ⁽⁶⁾, fatte, parte per adat-

(6) Les textes n'étaient alors pas considérés comme des ouvrages du passé: ils conservaient une valeur actuelle et représentaient la vérité

tare gli antichi testi alle nuove esigenze, parte per conferire alle nuove idee l'autorità del nome venerato, cui si fa ricorso quando il convincimento non può essere ottenuto con deduzioni logiche da indiscussi principi. E, nella discussione dei principi, si ritorna a DEMOCRITO, perchè i pochi frammenti democritei, e le incerte tradizioni lasciano adito alle più ardite ricostruzioni.

La concezione monadica, non solo della materia fisica, ma anche delle grandezze geometriche, conferiva perspicuità alla indagine ed apriva largo campo alla fantasia. E si esagerò, anche, su questa strada: È del 1615, due anni dopo la comparsa dell'opera di CATALDI sulle frazioni continue, la *Stereometria doliorum*, dove G. KEPLERO intende di fare a modo suo un *Supplementum* ad ARCHIMEDE, con procedimenti affatto personali, senza unità di metodo, anzi senza seguire alcun metodo; se non si voglia considerare come metodo la verifica a posteriori del risultato finale ottenuto per particolari problemi.

Lo stesso KEPLERO del resto pare non prenda troppo sul serio il suo libro, quando a conclusione della seconda parte di esso, dedicata al calcolo della capacità delle botti di vino, pone questa graziosa parodia di CATULLO:

Et cum pocula mille mensi erimus,
Conturbabimus illa, ne sciamus.

Sta il fatto che, se alcune delle sue quadrature furono genialmente concepite ed ebbero, nel seguito, importanti applicazioni, altre, appoggiate ad intuitive vedute, o ad affrettate conclusioni per analogia, sono fondamentalmente errate, onde venne che tale pubblicazione, nel primo momento almeno, non favorì, anzi rallentò lo sviluppo dei metodi nuovi; ma ad ogni modo, col destare vivace discussione, attirò sui nuovi problemi l'interesse della scienza (7).

10. Di ben altra importanza, pel progresso del pensiero scientifico, furono le opere di GALILEO e dei suoi discepoli: BONAVENTURA CAVALIERI, EVANGELISTA TORRICELLI, PIETRO MENGOLI. Nei « *Discorsi sopra due nuove scienze* », pubblicati nel 1638, ma nelle

scientifique. « On allait même parfois jusqu'à faire subir à ces textes des altérations destinées à les mettre d'accord, si besoin était, avec les idées de l'époque, sans d'ailleurs que ces modifications fussent notées, ni même en général, aperçues par ceux qui les exposaient ou les lisaient ». (Cfr. MIELI-BRUNET, *Histoire des sciences, Antiquité*, Payot, Paris, 1935, p. 14.

(7) Cfr. p. es. ALEXANDER ANDERSON, *Vindiciarum Archimedeis*, Parisijs 1616.

parti essenziali noti fin dal 1620, nella *Geometria degli Indivisibili*, nell'*Opera Geometrica di Torricelli* l'Analisi infinitesimale moderna ha trovato, non solo le sue origini, ma i suoi fondamentali sviluppi. La quadratura di figure geometriche aventi estensione lineare (o superficiale) infinita, le acute considerazioni di ordine infinitesimale che accompagnano l'esposizione dei principi su cui TORRICELLI fondava il suo metodo — *per lineas supplementares* — (che prelude al *metodo differenziale di Leibniz*), dimostrano che il passo necessario alla comprensione del concetto di infinito attuale nella totalità degli elementi di una successione infinita, era già stato compiuto e superato ⁽⁸⁾. Lo stesso *principio degli indivisibili di Cavalieri*, suppone in atto l'infinitesimo nell'indivisibile e l'infinito nella totalità di tali elementi ⁽⁹⁾.

La rappresentazione geometrica data da CAVALIERI e da TORRICELLI alle loro teorie ed ai loro principi, non esclude le possibili applicazioni nel campo numerico, e le *Quadrature aritmetiche di PIETRO MENGOLI* ce ne offrono esempio.

11. Ma giova qui ricordare che, pur rimanendo nel campo geometrico, e senza scostarsi dal rigore logico proprio delle opere classiche, *fino dal 1641* ⁽¹⁰⁾, EVANGELISTA TORRICELLI riesciva a *costruire un segmento atto a rappresentare la somma di tutti gli infiniti termini di una progressione geometrica decrescente di segmenti comunque data, ed insegnava a sommare progressioni geometriche infinite, di qualunque specie di grandezze, (etiam in numeris)*.

Questo passo, nello sviluppo della teoria del limite e delle serie, (del quale si fa merito a GREGORIO DI SAN VINCENZO e ad ANDREA TACQUET), è di notevole importanza nella storia del pen-

⁽⁸⁾ In una Memoria su l'*Opera geometrica di Torricelli*, che si sta pubblicando nei « Monatshefte » di Vienna ho messo in rilievo questo aspetto del pensiero torricelliano, e ciò mi esime dall'entrare ora in ulteriori particolari,

⁽⁹⁾ Il WALLNER mette in evidenza la sostanziale differenza fra il metodo di CAVALIERI e quelli seguiti da ARCHIMEDE, da LUCA VALERIO, da GREGORIO di SAN VINCENZO, e conclude: « Kurz, der Unterschied beider Methoden ist so gross, dass ich eine Entwicklung der einen aus der andern für vollkommen ausgeschlossen halte. Ich glaube vielmehr, dass Cavalieris Verfahren auf ein bestimmtes Vorbild überhaupt nicht zurückführbar ». (Cfr. *Die Wandlungen des Indivisibilibenbegriffs von Cavalieri bis Wallis*, « Bibliotheca Math. », Bd. 4, p. 39).

⁽¹⁰⁾ Questo in occasione della quadratura del solido iperbolico infinitamente lungo. V. lettera a M. RICCI del 17 Marzo 1646, e lettera a B. CAVALIERI del 19 Dicembre 1641.

siero scientifico. Non sarà dunque male l'entrare in qualche particolare.

Le proposizioni torricelliane sono esposte nei Lemmi XXIV, XXV, XXVI, XXVII, dell'operetta: « *De dimensione parabolae* » pubblicata nel 1644, e riportata anche nella edizione faentina delle Opere al Tomo I, parte I (pp. 147-150).

Nel Lemma XXIV, TORRICELLI dimostra che: *se le rette AB, CB concorrono nel punto B, e se fra di esse è tracciato il flessi-*

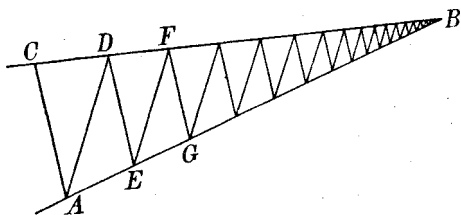


Fig. 1

lineo CADEFG, ... in modo che siano fra loro paralleli i segmenti CA, DE, FG, ..., AD, EF, ..., i segmenti fra loro paralleli sono in proporzione continua (Fig. 1).

Ed infatti $AC:ED = AB:EB = DB:FB = ED:GF \dots$. Di qui in particolare si ricava che anche i segmenti $AB, EB, GB, \dots, CB, DB, FB, \dots$ sono continuamente proporzionali.

Nel Lemma seguente, dimostra che: *se poniamo fra le rette concorrenti AB, CB i segmenti AC, DE paralleli fra loro, e, congiunta AD immaginiamo il flessilineo continuato ad infinitum, si troveranno in esso tutti i termini (omnes et singulos ad unguem terminos) della progressione geometrica infinita, che ha per primi termini AC, ED (Fig. 2).*

Infatti: supponiamo, se sarà possibile, che alcuni termini di tale progressione non siano nel flessilineo, e fra quelli sia I il massimo. Tutti i termini che precedono I nella progressione saranno nel flessilineo. Sia MN , quello immediatamente precedente I . Avremo dunque: $MN:I::AC:ED$, e nel flessilineo avremo: $MN:PO::AC:ED$. Sarà dunque $I = PO$, ed apparterrà al flessilineo.

In modo analogo si prova che niuno dei termini del flessilineo può non appartenere alla progressione.

Lemma XXVI, PROBLEMA: *Data la progressione geometrica decrescente di segmenti a_1, a_2, a_3, \dots , trovare un segmento eguale alla somma di tutti.* (Suppositis infinitis rectis lineis continua proportione maioris inaequalitatis, rectam lineam, quae praedictis sit aequalis reperire).

Fatto $AC = a_1$, $DE = a_2$; se i segmenti AC , DE saranno paralleli, le rette AE , CD concorreranno in un punto G , e nel flessilineo continuato all'infinito fino al punto G , saranno compresi tutti i termini della progressione. Dal punto G si conduca GL

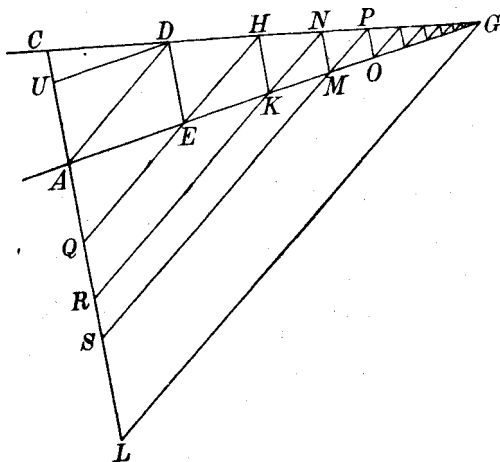


Fig. 2

parallela a DA , fino ad incontrare la AC nel punto L . Sarà CL il segmento richiesto.

Infatti, tutti i segmenti del flessilineo, dei quali il primo è CA (cioè tutti i termini della progressione), sono eguali ai segmenti similmente posti del segmento CL .

Lemma XXVII. - *Suppositis infinitis magnitudinibus in continua proportione geometrica maioris inaequalitatis, erit prima magnitudo media proportionalis inter primam differentiam et inter aggregatum omnium.*

Assumpta enim praecedenti constructione, ducatur DU aequidistans ipsi AG : et erit CU prima differentia. Sed CU ad primam magnitudinem AC est ut CD ad CG , hoc est ut CA ad CL aggregatum omnium ⁽¹¹⁾.

12. Scholium. - *Hoc esse verum etiam in numeris, et cuiuscumque generis magnitudinibus non dubitabimus affirmare. Afferremus etiam*

⁽¹¹⁾ Dalla proposizione torricelliana viene immediatamente la formula oggi usata per la somma degli infiniti termini di una progressione geometrica decrescente. Si ha infatti: $a_1 - a_2 : a_1 = a_1 : a_1 + a_2 + a_3 + \dots$, da cui:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \frac{a_1^2}{a_1 - a_2} = \frac{a_1}{1 - \frac{a_2}{a_1}}$$

universaliorum demonstrationem, praecipue cum admodum brevis sit.

« *Huius veritas conclusis cum a nobis obiter celeberrimo Cavalerio collata fuisset, ipse etiam idem Theorema sequenti demonstratione, quae a nobis iam prima inventione adhibita fuerat, confirmavit.* ».

Praemittitur hoc: Quod si fuerint quocumque magnitudines sive finitae numero, sive infinitae, quarum antecedens semper sequente maior sit. erit prima omnium magnitudo aequalis omnibus differentijs simul cum ipsa minima magnitudine sumptis.

(Cioè si ha: $a_1 = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \dots + (a_{n-1} - a_n) + a_n$).

... Supponantur iam infinitae numero magnitudines in continua proportione geometrica maioris inaequalitatis; manifestum est quod minima omnium magnitudo vel non erit, vel punctum erit. Ergo in hoc casu erit prima magnitudo aequalis omnibus tantum differentijs ($a_1 = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \dots$).

Cum autem ponantur magnitudines in continua proportione geometrica, erunt etiam differentiae in eadem ratione proportionales; et ideo. (facta conversione) erit ut prima differentia ad primam magnitudinem, ita secunda differentia ad secundam magnitudinem, et sic semper.

$$((a_1 - a_2):a_1 :: (a_2 - a_3):a_2 :: (a_3 - a_4):a_3 :: \dots).$$

Propterea ut una ad unam, ita collectim erunt omnes ad omnes. Nempe. ut prima differentia ad prima magnitudinem, ita erunt omnes simul differentiae, (hoc est ipsa prima magnitudo) ad omnes magnitudines simul ⁽¹²⁾,

$$(a_1 - a_2):a_1 :: a_1:a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Questo comporre, in una successione infinita di ragioni eguali, non era nello spirito classico, perciò forse TORRICELLI preferiva la dimostrazione superiormente esposta ⁽¹²⁾.

13. Si deve ad uno scolaro di CAVALIERI, il bolognese PIETRO MENGOLI, la ripresa degli studi che il suo concittadino PIETRO ANTONIO CATALDI, aveva iniziato sugli algoritmi infiniti. Ciò nel-

⁽¹²⁾ Ho riportato integralmente il testo di TORRICELLI per rendere più evidente il confronto col testo di TACQUET, di cui più oltre dovremo parlare.

⁽¹³⁾ Ci furono infatti obiezioni (cfr. lettera al CAVALIERI del 21 Aprile 1646) benchè la dimostrazione del Comporre, anche per successioni infinite di ragioni eguali, sia data al Lemma XXVIII a pp. 151, 152.

L'opera: « *Novae quadraturae arithmeticae* » pubblicata a Bologna nel 1650 (14).

Le opere del MENGOLI erano ai suoi tempi pregiate e diffuse anche fuori d'Italia; ma poi, forse per la terminologia ed il simbolismo da lui introdotti, e non più usati, furono trascurate, e dimenticate. Furono G. ENESTRÖM e G. VACCA a rivendicare a MENGOLI il merito di aver per primo sommato serie infinite, e dimostrato l'esistenza di serie il cui termine generale tende allo zero e nelle quali la somma degli infiniti termini può superare qualsiasi quantità data (15).

Il MENGOLI, nella prefazione delle sue « *Quadrature Arithmetiche* », dice di essere stato indotto a quello studio dalla contemplazione della memoria di Archimede sulla quadratura della parabola dove si considerano infiniti triangoli procedenti in proporzione quadrupla, e dalla dimostrazione fatta da geometri (TORRICELLI) che la somma di infinite grandezze, in qualsiasi proporzione continua decrescente, converge verso una quantità finita.

Considera, in generale, le serie in cui il termine generale tende allo zero, trova che alcune di esse hanno somma finita, altre, infinita: « *ut aliqua possit assumi minor qualibet proposita, vel ut deficientes in infinitum evanescant, infinitae compositae omnem propositam quantitatem valeant superare* » (p. 1 della *Praefatio*). Dimostra infatti, con procedimento analogo a quello seguito da

Torricelli per la divergenza dell'integrale $\int \frac{dx}{x}$, la divergenza della serie armonica, ed in generale della serie degli inversi di una progressione aritmetica $\sum \frac{1}{a+bn}$.

Il prof. G. VACCA ha fatto giustamente osservare (loc. cit.), che « l'ENESTRÖM non rende giustizia al MENGOLI, pretendendo che « nello scritto del MENGOLI manchi la conclusione. Essa c'è, e più

(14) Nell'*Imprimatur* di questo libro, OVIDIO MONTALBANO, censore, scriveva: « *Omnium calculis approbandam, immo albis signandam lapillis Arithmeticam hanc Speculationem censuit Ovidius Montalbanus* ».

Dal Carteggio di LEIBNIZ coll'OLDENBURG si ricava che le quadrature aritmetiche del MENGOLI erano note all'OLDENBURG, al COLLINS ed allo stesso LEIBNIZ. V. G. VACCA, *Sulle scoperte di Pietro Mengoli*, « Rend. Lincei », sedute 5 e 19 Dic. 1915, p. 512.

(15) Cfr. G. ENESTRÖM, *Zur Geschichte der Unendlichen Reihen um die Mitte des siebzehnten Jahrhunderts*, « *Bibl. Mathem.* », 1912, vol. 123, pp. 135-148, VACCA, loc. cit..

« volte ripetuta ⁽¹⁶⁾. È veramente ingiusto, dopo aver letto il MENO-
 « GOLI, l'attribuire ancora a GIACOMO BERNOULLI il merito di aver
 « per il primo, nel 1689, dimostrato la divergenza della serie armo-
 « nica ».

14. Il MENGOLI considera poi la serie delle inverse dei numeri
 triangolari $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} + \dots$: dice che questa si può

quadrare e che la sua somma è eguale ad 1, perchè la somma dei
 primi n termini è data da $\frac{n}{n+2}$ e questa differisce da 1 meno di
 qualsiasi quantità data; « quod aggregatae quotlibet a prima sunt
 « aequales numero multitudinis ipsarum denominato per numerum
 « binario maiorem, et propterea semper unitate sunt minores eo
 « defectu, qui iuxta multitudinis additarum fractionum incrementum
 « infra quamlibet assignatam magnitudinem diminuitur et in infi-
 « nitum evanescit » (p. 7 della Praefatio).

Troviamo qui, non solo il chiaro concetto di limite e di somma
 di una serie infinita, ma l'implicita definizione di questi concetti
 espressa in forma che per precisione di termini non perde al con-
 fronto di quella che, dopo CAUCHY, è entrata nell'uso comune.

Questo teorema, enunciato nella prefazione, è dimostrato nelle
 prime 17 proposizioni del testo, con rigore euclideo di deduzione
 logica: notevole fra quelle proposizioni, l'Assioma primo (p. 18).

« Quando infinitae magnitudines infinitae sunt extensionis, pos-
 « sunt in aliqua multitudine sumi, ut superent quamlibet propo-
 « sitam extensionem », che dà una implicita definizione di quan-
 tità variabile tendente all'infinito.

La Proposizione seguente (Prop. 15) dà la condizione di conver-
 genza di una serie a termini positivi: « Quando in ordine magni-
 « tudinum, quotlibet assumptae a prima sunt minores una eadem
 « proposita magnitudinem generis eiusdem, omnes a prima in infi-
 « nitum dispositae, et aggregatae sunt extensionis finitae ».

Con egual rigore logico il MENGOLI dimostra che converge la
 somma degli inversi dei numeri $n(n+r)$ ed è:

$$\Sigma \frac{1}{n(n+r)} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{r} \right).$$

(16) Nel passo sopra ricordato dell'enunciato, e nella conclusione:
 « Ergo propositae fractiones in infinitum dispositae, et aggregatae, infinitam
 « extensionem valent implere » (p. 4 della Praefatio).

Così pure degli inversi di numeri solidi:

$$\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}, \quad \sum \frac{1}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)} = \frac{1}{12},$$

con procedimenti che valgono in generale per serie della forma

$$\sum \frac{1}{(a+mh)(a+(m+1)h) \dots (a+(m+p-1)h)}.$$

Ed infine che convergono le serie

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{m+1} - a_m}{a_m a_{m+1}} = \frac{1}{a_1}, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{m+p} - a_m}{a_m a_{m+1} \dots a_{m+p}} = \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \dots a_p}$$

dove le a_m , le p , e le h sono numeri interi positivi, ed è. per ogni m , $a_{m+1} > a_m$.

... « So viel ich weiss (osserva a questo punto (p. 139) l'ENESTRÖM), « sind Reihen der fraglichen Art sonst nicht vor TAYLOR ⁽¹⁷⁾ und « NICOLE ⁽¹⁸⁾ summirt worden ».

13. Il modo con cui dal MENGOLI è condotta la trattazione di queste novissime sue proposizioni, implica la conoscenza di una compiuta teoria dei limiti. Tale è difatti quella che egli ha esposto nell' « *Elementum tertium* » dei suoi « *Geometriae speciosae elementa* ». Spetta al prof. AGOSTINI il merito di aver scoperto questa teoria e di averla interpretata con terminologia e simbolismo moderno; chè appunto la terminologia ed il simbolismo introdotti in essi dal MENGOLI ne rendono oscura la interpretazione ⁽¹⁹⁾.

MENGOLI considera gli enti numerici a/b , definiti dal limite $\frac{a}{b} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ (a_n, b_n interi positivi) e dimostra che le proprietà dei rapporti e delle proporzioni valgono anche al limite, per rapporti a/b così definiti, quando essi siano diversi da zero e da infinito, e, nel caso contrario, enuncia proprietà del calcolo degli infiniti e degli infinitesimi.

Sono in sostanza i principii della *Teoria dei limiti*, ed il *Calcolo dei limiti*, esposti con metodo classico. E tutto ciò 28 anni prima che NEWTON pubblicasse i suoi: *Philosophiae naturalis principia mathematica* ».

⁽¹⁷⁾ Cfr. B. TAYLOR, *Methodus incrementorum directa et inversa*, Londini 1715, p. 58.

⁽¹⁸⁾ Cfr. F. NICOLE, *Traité du calcul des différences finies*, « Mém. Acc. d. Sc. de Paris », 1717, p. 15.

⁽¹⁹⁾ Cfr. A. AGOSTINI, *La teoria dei limiti in Pietro Mengoli*, « Periodico di Matematiche », 1925, vol. V, pp. 18-30.

16. Riepiloghiamo: Nel 1613 CATALDI sviluppava in serie le radici di numeri non quadrati e studiava le condizioni di convergenza delle serie risultanti. Dallo studio di quelle serie, ricavava la costruzione della frazione continua infinita.

Nel 1641 TORRICELLI considerava la totalità dei termini di una serie infinita, come atta a definire una grandezza, insegnava a costruire un segmento eguale alla totalità di infiniti segmenti, ed un numero come totalità di infiniti numeri.

Nel 1650 PIETRO MENGOLI aveva perfetta cognizione dei concetti di limite di una successione di numeri e di somma di una serie infinita, considerava la serie infinita come algoritmo numerico atto alla determinazione di nuovi enti numerici, dimostrava la divergenza della serie armonica, e trovava regola opportuna a sommare interessanti tipi di serie a termini positivi. Nel 1657 esponeva una compiuta e razionale teoria dei limiti.

17. Ora, sta il fatto che, per solito, viene attribuito a GREGORIO DI SAN VINCENZO il primo passo nella concezione dei principii che reggono la teoria dei limiti e delle serie, per avere egli nella sua *Opera geometrica*, pubblicata nel 1647, insegnato a costruire attualmente un segmento somma di infiniti altri in progressione geometrica, ed al TACQUET, ed al WALLIS, il passo decisivo, per avere essi nel 1656, calcolata la somma della progressione geometrica infinita, col passaggio al limite della formula data da EUCLIDE per la somma di un numero finito di grandezze continuamente proporzionali ⁽²⁰⁾.

Si può domandare: GREGORIO DA SAN VINCENZO, TACQUET, e WALLIS conoscevano le opere di TORRICELLI e di PIETRO MENGOLI?

È cosa nota che a quel tempo le opere matematiche degli italiani erano conosciute, studiate ed apprezzate dagli stranieri ⁽²¹⁾. GREGORIO DA SAN VINCENZO aveva fatto a Roma la sua iniziazione matematica al Collegio Romano, nel tempo in cui colà insegnava LUCA VALERIO. Il WALLIS nelle sue opere mostra di conoscere le opere di TORRICELLI, e da esse prende lo spunto per ulteriori ricerche. Nella Biblioteca Universitaria di Lovanio, città dove GREGORIO e TACQUET svilupparono la loro opera scientifica, prima dell'incendio avvenuto durante la grande guerra esisteva una copia delle opere di PIETRO MENGOLI, e colà quelle opere furono vedute e studiate anche dal nostro G. VACCA.

⁽²⁰⁾ Cfr. p. es. WALLNER, *Ueber die Entstehung des Grenzbegriffes*, « *Bibl. Mathem.* », vol. 4°, serie 3, pp. 251-256.

⁽²¹⁾ Cfr. p. es. G. VACCA, e G. ENESTRÖM, loc. cit..

Questi sono indizi già per sè stessi molto significativi. Ma la prova palmare ci viene inconsciamente offerta dallo stesso TACQUET nelle sue opere: *Elementa Geometriae* (1654), *Arithmeticae Theoria et praxis* (1656); opere diffusissime, e non solo nelle scuole dei gesuiti, fino a tutto il secolo XVIII.

Io mi servo, per la Geometria, della Edizione Terza (Antuerpiae. Apud Jacobus Meursium, Anno M.DC.LXXIII) che è identica alla prima, e per l'Arithmetica, della edizione di Milano del 1741, che, anch'essa, in questo punto è identica alla prima.

Nella Geometria, (pubblicata la prima volta l'anno 1654), dopo aver premesso nello *Scholium* alla prop. XI (Liber Sextus, p. 194) che: « Poterit vero proportio data non solum per tres terminos, « sed etiam per infinitos continuari, et tota finitorum propor- « tionalium terminorum summa exhiberi. Pulcherrime hanc rem: « totumque adeo Geometricae progressionis negotium, GREGORIUS « a S. VINCENTIO prosecutus est toto libro 2, sui operis. Nos in « gratiam studiosorum succintam rei propositae constructionem ac « demonstrationem hic exhibebimus »; senza mai nominare TORRICELLI, *spiattella tali e quali i Lemmi torricelliani*, salvo quelle inconsistenti varianti, che per solito si usano per nascondere il plagio ⁽²²⁾.

⁽²²⁾ Nella costruzione del flessilineo torricelliano, fa $AL=AB$, $BO=BC$,... e così i termini della progressione risultano adagiati sulla linea AZ ; ma il discorso è sempre quello di TORRICELLI. E nella *dimostrazione universale e brevissima in ogni genere di quantità, anche numeriche*, crede di fare cosa nuova sostituendo alla progressione AB, BC, CE ,... prima considerata, quella delle somme: AZ, BZ, CZ ,...

Ma per ogni buon rispetto trascriverò il testo di TACQUET: (p. 196)

PROBLEMA. — « Data sit ratio maioris inaequalitatis AB ad BC , oporteat « hanc per infinitos terminos continuare et omnium summam exhibere.

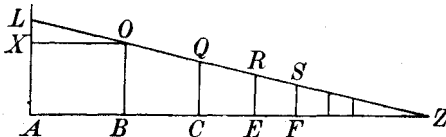


Fig. 3

« Erigantur perpendiculares AL, BO aequales datis AB, BC , et per LO « ducatur recta concurrens cum ABC producta in Z ».

Dico 1°: « Si ex C erigas perpendicularem CQ , erit CQ tertia propor- « tionalis. QC transfer in CE , et ex E erige ER , erit haec quarta. ER transfer « in EF et erige FS , erit haec quinta: Atque ita ratio AB ad BC , hoc est AL « ad BO , per terminos AL, BO, CQ, ER, FS ,... etc., sive $AB, BC, CE, EF,$ « FI , etc., in infinitum continuabitur, quia quilibet terminus (ut FS) poterit

Due anni dopo (1656) TACQUET pubblicava l' « *Arithmeticae Theoria et Praxis* »; nello stesso anno WALLIS pubblicava l' « *Arithmetica infinitorum* ». In entrambe le opere si calcola la somma degli infiniti termini di una progressione geometrica decrescente, press' a poco nello stesso modo.

Ecco il testo di TACQUET (Lib. V, Cap. IV, Theorema XIX):

« *Si progressio geometrica deorsum continuetur in infinitum est ut duorum primorum, hoc est maximorum terminorum differentia est ad secundum terminum, ita primus terminus est ad reliquam infinitorum terminorum summam.* »

« *Demonstratio. Per Prop. XXXV, Lib. IX (Euclide) in progressione finita ut primorum seu maximorum terminorum differentia est ad secundum, ita primus, dempto minimo est ad summam reliquorum. Quare cum in progressione descendendo in infinitum continuata minimus terminus evanescat, erit ut primorum differentia ad secundum, ita primus ad reliquorum infinitorum summam. Q. E. D.* ».

« *aufferri ex residuo FZ, cum enim LA (hoc est AB) sit minor quam AZ, etiam FS erit minor quam FZ.* » (Lemma XXV di TORRICELLI).

Dico 2°: « *AZ est aequalis summae infinitarum proportionalium.* ». Segue la dimostrazione che è immediata. (Lemma XXVI di TORRICELLI).

THEOREMA. — « *Primorum terminorum differentia, primus terminus, et tota infinitarum proportionalium summa, sunt continue proportionales.* ».

« *In superiori figura ducatur OX parallela ad AZ, igitur LX erit differentia primi termini AL, seu AB, et secundi BO, seu BC. Quoniam XO est parallela ad AZ, erit LX ad XO ut LA ad AZ. Sed XO est AB et LA etiam est AB. Ergo LX differentia est ad AB primum terminum, ut AB primus terminus ad AZ totam summam. Quod erat demonstrandum.* » (Lemma XXVII di TORRICELLI).

« *Idem universaliter, et brevissime demonstrabitur in omni genere quantitatis hunc in modum. Sint continue proportionales quaecumque (etiam numeri) AZ, BZ, CZ, etc., quae transferantur omnes in primam AZ. Erunt igitur AB, BC, CE, EF, etc., proportionalium differentiae, quae una cum postrema quantitate IZ, aequantur primae AZ. Quia vero, si proportionales in infinitum continuentur, postrema quantitas, per lem. 2, evanescit, patet infinitarum proportionalium differentias aequari primae AZ. Deinde quia est AZ ad BZ ut BZ ad CZ, et sic deinceps, erit dividendo AB ad BZ ut BC ad CZ, et convertendo, ut AB prima differentia ad AZ primam quantitatem, ita BC secunda differentia ad BZ quantitatem secundam, et sic deinceps. Ergo ut prima differentia ad AZ primam quantitatem, ita omnes differentiae (hoc est ut iam ostendi prima quantitas AZ), ad omnes quantitates, hoc est ad totam summam infinitarum quantitatum. Quod erat demonstrandum.* » (Scholium al Lemma XXVII di TORRICELLI).

Fiero e lieto di aver fatto questa grande scoperta, TACQUET esclama:

« Vides, opinor, qui haec legis, quam facilis sit, quod supra me
« ostensurum promiseram, a progressionem finita ad infinitam tran-
« situs. Unde mirum est, priores Arithmeticos, qui progressionem
« finitas tenerent, infinitas ignorasse, cum hae ab illis immediate
« dependeant ».

Ci meravigliamo ancora noi, che l'illustre TACQUET non si sia accorto che questo risultato e quello trovato 15 anni prima da TORRICELLI, e che egli ha riportato nella Geometria, sono una sola ed unica cosa, e che il procedimento seguito da TORRICELLI è concettualmente il medesimo, sia nella considerazione della progressione finita, sia nel passaggio al limite per la infinita, di quello che egli ha indicato. Ma forse avrà creduto di far cosa nuova partendo

dalla formula $\frac{a_1 - a_2}{a_2} = \frac{a_1 - a_n}{a_2 + a_3 + \dots + a_n}$ anzichè dalla euclidea

$\frac{a_1 - a_2}{a_1} = \frac{a_1 - a_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$; e che la formula risolutiva da lui esposta

$$\frac{a_1 - a_2}{a_2} = \frac{a_1}{a_2 + a_3 + \dots}, \quad \text{cioè} \quad a_2 + a_3 + \dots = \frac{a_2}{1 - \frac{a_2}{a_1}},$$

sia diversa da quella euclidea (di TORRICELLI) ⁽²³⁾

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \frac{a_1}{1 - \frac{a_2}{a_1}}.$$

⁽²³⁾ Ma invero qui il buon TACQUET non ci ha colpa, perchè il suo maestro, GREGORIO, alla prop. LXXX, aveva dato, come procedimenti diversi le tre formule:

$$\frac{a_2 - a_3}{a_3} = \frac{a_2}{a_3 + a_4 + \dots}, \quad \frac{a_1 - a_2}{a_1} = \frac{a_2}{a_2 + a_3 + \dots}, \quad \frac{a_1 - a_2}{a_1} = \frac{a_1}{a_1 + a_2 + \dots},$$

cioè:

$$a_3 + a_4 + \dots = \frac{a_2 a_3}{a_2 - a_3} = \frac{a_3}{1 - a_3/a_2}, \quad a_2 + a_3 + \dots = \frac{a_1 a_2}{a_1 - a_2} = \frac{a_2}{1 - a_2/a_1},$$

$$a_1 + a_2 + \dots = \frac{a_1^2}{a_1 - a_2} = \frac{a_1}{1 - a_2/a_1}.$$

GREGORIO DA SAN VINCENZO, pubblicando la sua opera nel 1647 (anno in cui morivano TORRICELLI e CAVALIERI), diceva di averla, in parte almeno, composta fino dal 1625, e di avere, in quell'anno, lasciato il manoscritto a Roma, presso il correligionario CRISTOFORO GRIEGENBERGER; e con ciò presumeva di potersi attribuire la priorità della proposizione