
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MARIO MANARINI

Sulle forze ponderomotrici nei dielettrici eterogenei in relazione alle tensioni elastiche nei corpi deformati

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2,
Vol. 1 (1939), n.4, p. 345–350.

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_4_345_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_4_345_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1939.

**Sulle forze ponderomotrici nei dielettrici eterogenei
in relazione alle tensioni elastiche nei corpi deformati.**

Nota di MARIO MANARINI (a Bologna).

Sunto. - *In questo lavoro si dà una semplice dimostrazione di un teorema di MAXWELL generalizzato da HELMHOLTZ relativo alle forze ponderomotrici nei dielettrici materiali eterogenei, estendendo una formula stabilita dall'A. nel caso del vuoto. L'analogia con lo stato di tensione elastica nei mezzi deformati risulta immediatamente visibile.*

In una mia recente Nota ⁽¹⁾ ho avuto occasione di dare una semplicissima forma intrinseca all'espressione della densità, per

⁽¹⁾ M. MANARINI, *Interpretazione vettoriale assoluta dei tensori lineari del terzo ordine e applicazione al campo elettromagnetico stazionario.* (Nota II, « Rend. R. Acc. dei Lincei », serie 6^a, vol. XXI, 1935-XIII, pp. 277-283).

unità di volume, della forza ponderomotrice che si sviluppa in un campo elettrostatico nel vuoto, ponendola, analogamente a quanto avviene per la forza di massa per unità di volume e in uno stato di tensione elastica per un corpo deformato, uguale al gradiente di un'omografia (dilatazione).

Credo che non sia inutile trattare la stessa questione nel caso generale di un dielettrico materiale eterogeneo, nel quale lo stato di *tensione* di MAXWELL verrà rilevato in forma altrettanto semplice ed espressiva, ancora mediante il gradiente di un'omografia vettoriale. Tale omografia (dilatazione) risulterà costruita punto per punto col campo elettrico \mathbf{E} , con lo spostamento di MAXWELL \mathbf{D} ed ancora con la variazione della costante dielettrica $\epsilon(P)$, caratteristica del mezzo, in corrispondenza della variazione della densità $\eta(P)$ del mezzo stesso, variazione che è stata introdotta per la prima volta da HELMHOLTZ, generalizzando le idee di MAXWELL⁽²⁾. E poichè detta omografia, per il modo stesso con cui risulta costruita, determina lo stato fisico del punto in cui si calcola potrà essere considerata come un elemento primitivo per trarne, come conseguenza, l'espressione della forza ponderomotrice.

Le forze ponderomotrici si trovano calcolate nei buoni trattati sulla teoria matematica dell'elettromagnetismo. Per comodità del lettore mi permetto di riportare sommariamente questo calcolo operando, con metodo vettoriale, direttamente con gli enti che entrano nella questione, cosicchè verrà ridotto ad estrema brevità e mi servirà per ottenere l'espressione intrinseca per la forza ponderomotrice in quella forma che a me particolarmente interessa per lo scopo che mi sono proposto.

Consideriamo dunque il campo elettrostatico \mathbf{E} in un dielettrico materiale eterogeneo di densità $\eta(P)$ caratterizzato, come si è detto, dalla costante d'induzione $\epsilon(P)$, nel quale si trovi immersa una distribuzione spaziale di carica elettrica con densità $\rho(P)$. L'energia elettrostatica immagazzinata in detto mezzo ha la ben nota espressione maxwelliana (in forma razionalizzata secondo GIORGI)

$$(1) \quad \mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_{(S)} \mathbf{E} \times \mathbf{D} dS,$$

dove $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ è lo spostamento di MAXWELL e l'integrale del secondo membro, volendo, può essere pensato esteso a tutto lo spazio. Il calcolo della forza ponderomotrice ρdS , che si esercita sopra l'elemento dS del dielettrico nel punto P , in base al principio

(²) Cfr. ad es. J. H. JEANS, *The mathematical Theory of Electricity and Magnetism*. [Cambridge, University Press, 1925, pag. 177].

della conservazione dell'energia viene a dipendere dalla relazione

$$(2) \quad \delta\mathcal{E} + \int_{(S)} \mathbf{p} \times \delta P dS = 0,$$

corrispondente agli spostamenti δP che si effettuano sulla materia.

Cosicchè tutto si riduce a valutare la variazione $\delta\mathcal{E}$ dell'energia elettrostatica causata appunto dagli spostamenti δP , variazione che corrisponde in parte alla conseguente variazione della densità $\rho(P)$ e in parte, con l'HELMHOLTZ, alla pure conseguente variazione di $\epsilon(P)$. In assenza di cariche elettriche distribuite sopra superfici e supposta, per ora, la continuità della funzione $\epsilon(P)$, procederemo al calcolo di $\delta\mathcal{E}$ facendo variare separatamente ρ ed ϵ per invocare poi il principio della sovrapposizione degli effetti. Con l'introduzione del potenziale elettrostatico $V(P)$, per detta variazione si trova facilmente

$$(3) \quad \delta\mathcal{E} = \delta_\rho \mathcal{E} + \delta_\epsilon \mathcal{E} = \int_{(S)} V \delta\rho dS - \frac{1}{2} \int_{(S)} \mathbf{E}^2 \delta\epsilon dS.$$

Evidentemente conviene trasformare questa espressione in un'altra avente l'esplicita forma di un lavoro, al fine di poterla paragonare col lavoro delle forze ponderomotrici incognite, che appunto entrano nella (2).

Per quanto riguarda la variazione $\delta\rho$ da porre nel primo integrale dell'ultimo membro della (3), applicando il teorema del flusso si trova che vale

$$(4) \quad \delta\rho = -\operatorname{div}_P(\rho\delta P).$$

Inoltre osserviamo che la costante dielettrica $\epsilon(P)$ varia per due ragioni: per il cambiamento di posto della particella dS ed ancora, come osservò l'HELMHOLTZ, perchè variando con gli spostamenti δP la configurazione del mezzo ne varia la densità $\eta(P)$ e in corrispondenza varia la costante dielettrica $\epsilon(\eta)$, tenendo però conto che la variazione della massa risulta nulla. Introducendo la dilatazione cubica θ del mezzo, espressa come è ben noto da

$$\theta = \operatorname{div}(\delta P),$$

si deduce come variazione totale $\delta\epsilon$ di ϵ , da introdurre nella (3), la seguente espressione

$$(5) \quad \delta\epsilon = -\operatorname{grad} \epsilon \times \delta P - \eta \frac{d\epsilon}{d\eta} \operatorname{div}(\delta P).$$

In base alla formula di analisi vettoriale

$$\operatorname{div}(\varphi \mathbf{u}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{u} + \operatorname{grad} \varphi \times \mathbf{u} \quad (3),$$

(3) Cfr., ad es., C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, *Analisi vettoriale generale*, vol. I, *Trasformazioni generali*, Zanichelli, Bologna, 1929, pag. 182 formula [1].

e tenendo conto che estendendo l'integrazione a tutto lo spazio gli integrali della divergenza risultano nulli, per la variazione $\delta\mathcal{E}$ dell'energia rimane la desiderata espressione in forma di lavoro

$$(6) \quad \delta\mathcal{E} = - \int_{(S)} \left\{ \rho \mathbf{E} - \frac{\mathbf{E}^2}{2} \text{grad } \varepsilon + \frac{1}{2} \text{grad} \left(\gamma \mathbf{E}^2 \frac{d\varepsilon}{d\eta} \right) \right\} \times \delta P dS.$$

Da questa, in base alla (3), per la forza ponderomotrice per unità di volume, consegue immediatamente l'espressione

$$(7) \quad \mathbf{p} = \rho \mathbf{E} - \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 \text{grad } \varepsilon + \frac{1}{2} \text{grad} \left(\gamma \mathbf{E}^2 \frac{d\varepsilon}{d\eta} \right);$$

la quale è appunto nella forma intrinseca che a noi interessa.

Essendo $\varepsilon = \text{div } \mathbf{D}$ e, con l'introduzione della diade $H(\mathbf{D}, \mathbf{E})$, avendosi

$$\text{grad } H(\mathbf{D}, \mathbf{E}) = (\text{div } \mathbf{D}) \cdot \mathbf{E} + \frac{d\mathbf{E}}{dP} \mathbf{D} \quad (4),$$

risulta

$$\rho \mathbf{E} = \text{grad } H(\mathbf{D}, \mathbf{E}) - \frac{d\mathbf{E}}{dP} \mathbf{D}.$$

Inoltre, per essere

$$\text{grad} \left(\frac{\varepsilon}{2} \mathbf{E}^2 \right) = \text{grad} \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{D} \right),$$

ed ancora

$$\begin{aligned} \text{grad} \left(\frac{\varepsilon}{2} \mathbf{E}^2 \right) &= \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 \text{grad } \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} \text{grad} (\mathbf{E} \times \mathbf{E}) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 \text{grad } \varepsilon + \left(K \frac{d\mathbf{E}}{dP} \right) \mathbf{D} \quad (5), \end{aligned}$$

dal confronto, tenendo presente che essendo \mathbf{E} un gradiente l'omografia $\frac{d\mathbf{E}}{dP}$ risulta una dilatazione (6), si ricava

$$\frac{1}{2} \mathbf{E}^2 \text{grad } \varepsilon = \text{grad} \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{D} \right) - \frac{d\mathbf{E}}{dP} \mathbf{D}.$$

Sostituendo in (7) deduciamo

$$\mathbf{p} = \text{grad } H(\mathbf{D}, \mathbf{E}) - \text{grad} \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{D} \right) + \frac{1}{2} \text{grad} \left(\gamma \mathbf{E}^2 \frac{d\varepsilon}{d\eta} \right),$$

(4) Cfr. *Analisi vettoriale generale*, loc. cit., pag. 190, formula [5].

(5) Si ricordi la formula che dà il gradiente del prodotto scalare:

$$\text{grad} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = K \frac{d\mathbf{u}}{dP} \mathbf{v} + K \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{u},$$

(cfr. *Analisi vettoriale generale*, loc. cit., pag. 188).

(6) Cfr. *Analisi vettoriale generale*, loc. cit., pag. 180.

e quindi

$$(8) \quad \mathbf{p} = \text{grad } \beta$$

con

$$(9) \quad \beta = H(\mathbf{D}, \mathbf{E}) - \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{D} + \frac{\gamma}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\gamma} \cdot \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{D}.$$

che, evidentemente, è una dilatazione ($K\beta = \beta$).

La (8) è analoga all'equazione indefinita di CAUCHY per l'equilibrio dei corpi elastici deformati (7), e la (9) estende la forma da me data nella citata Nota, per il caso del campo elettrostatico nel vuoto.

Occorre però subito aggiungere che, naturalmente, l'omografia β qui introdotta con la (9) non gode delle proprietà caratteristiche dell'omografia β degli sforzi interni che si determinano nella statica dei corpi elastici. Solo, come è noto, è lecito di affermare che le forze ponderomotrici agenti sulle particelle del dielettrico sono quelle stesse che farebbero equilibrio a sforzi interni « sui generis » definiti appunto dall'omografia espressa con la (9). Ed in ciò consiste il teorema di MAXWELL, generalizzato da HELMHOLTZ con l'aggiunta in β del termine dipendente dalla variazione della costante dielettrica $\varepsilon(P)$, al variare della densità γ del mezzo.

E precisamente se consideriamo anche qui il versore \mathbf{a} secondo le linee di forza, abbiamo

$$\beta \mathbf{a} \times \mathbf{a} = \frac{\varepsilon}{2} E^2 + \frac{\gamma}{\varepsilon} \frac{d\gamma}{d\varepsilon} E^2;$$

e se diciamo \mathbf{b} un versore normale alle linee stesse, risulta

$$\beta \mathbf{b} \times \mathbf{b} = -\frac{\varepsilon}{2} E^2 + \frac{\gamma}{\varepsilon} \frac{d\gamma}{d\varepsilon} E^2.$$

Si può dare allora la seguente interpretazione: lo stato sui generis di tensione di MAXWELL-HELMHOLTZ per il dielettrico consiste di una « trazione » in direzione delle linee di forza, d'intensità $\frac{\varepsilon}{2} E^2$; di una « pressione » in ogni direzione perpendicolare alle linee stesse, pure d'intensità $\frac{\varepsilon}{2} E^2$, e di una « pressione idrostatica » d'intensità $\frac{\gamma}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\gamma} E^2$, in tutte le direzioni.

In quel che precede si è supposta continua la funzione $\varepsilon(P)$. Supponendone invece la discontinuità attraverso ad una super-

(7) Cfr. P. BURGATTI, *Teoria matematica dell'elasticità*, vol. III dell' *Analisi vettoriale generale* (Zanichelli, Bologna, 1931, pag. 118).

ficie (Σ) immersa nel dielettrico (come accade, in modo concreto, allorchè nel campo elettrostatico si introduce un corpo coibente) si perviene facilmente al noto risultato (che si mette in evidenza con varie esperienze e che costituisce il cosiddetto *fenomeno di elettrostrizione*) secondo cui *le forze ponderomotrici tendono a deformare detta superficie (Σ) (ossia il corpo introdotto), ed anche a spostarla.*