Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Gino Arrighi

# Solido con un punto fisso: caso in cui un impulso attivo non cimenta il vincolo

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2*, Vol. **1** (1939), n.4, p. 339–345.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_4_339_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1939.

## Solido con un punto fisso: caso in cui un impulso attivo non cimenta il vincolo.

Nota di GINO ARRIGHI (a Lucca).

**Sunto** - *Si determina il luogo dei puuti d'applicazione di tali impulsi e le direzioni di questi in corrispondenza dei casi di degenerazione del luogo.*

**1.** Il problema del solido vincolato sottoposto ad un impulso attivo non sollecitante il vincolo, oltre che dal punto scientifico per gli sviluppi cui ha dato luogo, è di notevole interesse altresì dal punto di vista tecnico nel caso in cui non abbia ad aversi certezza della robustezza della realizzazione del vincolo.

In questa nota mi sono proposto il caso in cui il predetto vincolo sia la fissità di un punto ed ho iniziato col ricercare il luogo dei punti di applicazione di tali impulsi togliendo così l'erronea credenza che avesse a trattarsi di una superficie cubica.

Passo dipoi alla trattazione del caso generale di degenerazione che, oltre ad un interesse di svolgimento, dà adito ad alcune osservazioni di carattere geometrico. Da questo poi seguono cinque sottocasi; due dei quali già noti, e precisamente il secondo ed il quarto, che costituiscono l'unica letteratura nota nell'argomento qui in analisi.

Concludo la nota con alcune osservazioni di carattere geometrico sopra il caso generale e con l'enunciazione di un teorema di reciprocità.

Debbo avvertire che suppongo, per il solido, una estensione tale da aversi sempre non nullo il suo momento d'inerzia relativo a qualunque asse.

Si abbia un solido con un punto fisso $O$, l'impulso attivo $\mathbf{I}$ che. applicato in un suo punto $P$, non sollecita il vincolo, soddisfa, come noto, l'equazione

$$m\sigma^{-1}[(P-O)\wedge \mathbf{I}]\wedge(G-O)-\mathbf{I}=0$$

o, può dirsi anche, è direzione nulla della omografia

(1) $$m(G-O)\wedge\cdot\sigma^{-1}\cdot(P-O)\wedge+1,$$

dove $m$ è la massa totale, $G$ il baricentro e $\sigma$ la dilatazione d'inerzia del solido relativa al punto $O$.

Affinchè non debba assumersi identicamente $\mathbf{I}=0$ dovrà esser nullo l'invariante terzo della omografia soprascritta, cioè aversi [1]

$$I_2[m(G-O)\wedge\cdot\sigma^{-1}\cdot(P-O)\wedge]+I_1[m(G-O)\wedge\cdot\sigma^{-1}\cdot(P-O)\wedge]+1=0.$$

Passando a calcolare gli invarianti indicati si ottiene [2]

$$m^2(P-O)\times(G-O)\cdot(P-O)\times R\sigma^{-1}(G-O)-$$
$$-m(P-O)\times C\sigma^{-1}(G-O)+1=0$$

ovvero

(2) $$m^2(P-O)\times(G-O)\cdot(P-O)\times\sigma(G-O)-$$
$$-m\cdot I_3\sigma\cdot(P-O)\times C\sigma^{-1}(G-O)+I_3\sigma=0,$$

donde segue che il luogo dei punti $P$, già erroneamente ritenuto una superficie cubica, è una superficie del secondo ordine che in appresso indicheremo brevemente con $\Gamma$. Per $\Gamma$ è [3]

$$A_{44}=0,\quad A=(I_3\sigma)^2\frac{m^6}{16}[(G-O)\wedge\sigma(G-O)\times\sigma^{-1}(G-O)]^2.$$

(1) C. Burali-Forti e R. Marcolongo, *Trasformazioni lineari*, Zanichelli, Bologna, 1929. Vedi ultima delle formule (6) di pag. 60. L'invariante terzo di $m(G-O)\wedge\cdot\sigma^{-1}\cdot(P-O)\wedge$ è nullo per essere essa degenere.

(2) Cfr. op. cit. in (1). Vedi formule (28), (29) di pag, 117.

(3) Per comodità del lettore avverto che, posta l'equazione di una quadrica nella forma assoluta

$$\alpha(P-O)\times(P-O)+2\mathbf{u}\times(P-O)+n=0$$

dove $\alpha$ è omografia, $\mathbf{u}$ un vettore ed $n$ un numero costanti, mi sono valso delle formule

$$A=nI_3D\alpha-\mathbf{u}\times RD\alpha\mathbf{u},\quad A_{44}=I_3D\alpha$$

facilmente verificabili.

Nel nostro caso deve farsi

$$\alpha=m^2H[\sigma(G-O),\ G-O],\quad \mathbf{u}=-\frac{1}{2}mI_3\sigma\cdot C\sigma^{-1}(G-O),\quad n=I_3\sigma.$$

onde, se non nullo il prodotto misto entro parentesi quadra, essa è un parabolide iperbolico; vale anzi dimostrare che:

*Condizione necessaria e sufficiente affinchè sia* $\mathrm{A}=0$ *è che* G *si trovi nel piano di due direzioni principali d'inerzia per* O.

La sufficienza è evidente, mostriamo pertanto la necessarietà. Posto, nei soliti simboli

$$\sigma=\begin{pmatrix}\mathfrak{A}\mathbf{i} & \mathfrak{B}\mathbf{j} & \mathfrak{C}\mathbf{k}\\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\end{pmatrix}, \quad G=O+x_0\mathbf{i}+y_0\mathbf{j}+z_0\mathbf{k}$$

il prodotto misto si scriverà

$$-x_0y_0z_0(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})(\mathfrak{A}-\mathfrak{C})\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$$

donde per l'annullamento deve aversi almeno: nulla una coordinata di $G$ o l'elissoide d'inerzia per $O$ esser di rotazione; in entrambi i casi $G$ sta sul piano di due direzioni principali d'inerzia per $O$, come avevamo a provare.

**2.** Passeremo senz'altro alla considerazione del caso fondamentale di degenerazione dal quale, come in appresso vedremo, hanno a discendere varî sottocasi.

Se l'ellissoide d'inerzia per $O$ non è di rotazione e $G$ sta in un piano principale e non su una direzione principale, la $\Gamma$ degenera in una coppia di piani che si tagliano, normale l'uno a $\sigma(G-O)$ e l'altro a $G-O$; entrambi perpendicolari, pertanto, al piano principale sopra considerato.

Infatti se $G$ sta, ad esempio, sul piano $(O, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ è

$$I_3\sigma\cdot C\sigma^{-1}(G-O)=\mathfrak{B}\mathfrak{C}+\mathfrak{A}\sigma(G-O)$$

cosicchè la (2) genera la coppia

$$(a_1)\qquad m(P-O)\times\sigma(G-O)=\mathfrak{B}\mathfrak{C}$$

$$(a_2)\qquad m(P-O)\times(G-O)=\mathfrak{A}.$$

Per la determinazione della direzione dell'impulso non sollecitante il vincolo si tenga presente che: se una omografia ha una direzione nulla ed una non nulla, non esiste altra direzione nulla complanare con esse e che le direzioni complanari a due direzioni nulle sono nulle; ed infine che avremo a limitare la ricerca fra le direzioni normali a $G-O$ e che all'omografia (1) può sostituirsi la considerazione dell'altra ottenuta moltiplicando per $I_3\sigma$:

$$(3)\qquad mH[\sigma(G-O),\ \sigma(P-O)]+I_3\sigma-m(P-O)\times\sigma(G-O)\cdot\sigma.$$

Relativamente al caso preso in considerazione, quando $P$ stia sul piano $(a_1)$, essa si scrive

$$mH[\sigma(G-O),\ \sigma(P-O)]+\mathfrak{B}\mathfrak{C}(\mathfrak{A}-\sigma)$$

onde è subito visto che $\mathbf{i}$ è direzione nulla, mentre il trasformato di $\mathbf{i} \wedge (G - O)$, che è

$$\mathcal{B}\mathcal{C}[\mathcal{A} - m(P - O) \times (G - O)] \cdot \mathbf{i} \wedge (G - O) + \\ + m(G - O) \wedge \sigma(G - O) \times \mathbf{i} \cdot \mathcal{A} \cdot (P - O) \times \mathbf{i} \cdot \mathbf{i}$$

risulta in generale diverso da zero e si annulla solo per

$$(P - O) \times \mathbf{i} = 0 \quad \text{e} \quad m(P - O) \times (G - O) = \mathcal{A}$$

cosicchè:

L'impulso $\mathbf{I}$, quando il suo punto d'applicazione giaccia su $(a_1)$, deve avere direzione normale al piano principale in cui sta il baricentro, potendo assumere una direzione qualunque normale alla retta $OG$ nel solo caso in cui il punto di applicazione è comune ai piani in cui degenera $\Gamma$ e al piano principale considerato.

Nel caso in cui $P$ giaccia nel piano $(a_2)$, il trasformato di $\mathbf{i}$ mediante la (3) è

$$\mathcal{A}[\mathcal{B}\mathcal{C} - m(P - O) \times \sigma(G - O)]\mathbf{i}$$

mentre il trasformato di $\mathbf{i} \wedge (G - O)$ con la medesima è

$$m(G - O) \wedge \sigma(G - O) \times \mathbf{i} \cdot \mathcal{A} \cdot (P - O) \times \mathbf{i} \cdot \mathbf{i}$$

cosicchè il vettore

$$m(G - O) \wedge \sigma(G - O) \times \mathbf{i} \cdot (P - O) \times \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + \\ + [m(P - O) \times \sigma(G - O) - \mathcal{B}\mathcal{C}] \cdot \mathbf{i} \wedge (G - O)$$

dà una direzione nulla.

Per $(P - O) \times \mathbf{i} = 0$, $\mathbf{i} \wedge (G - O)$ è direzione nulla; per $P$ comune ai due piani, $\mathbf{i}$ è direzione nulla ed infine, quando siano sodisfatte ambedue le condizioni sono nulle tutte le direzioni normali a $G - O$: queste due ultime combinazioni concordano coi risultati precedentemente ottenuti. Pertanto:

L'impulso $\mathbf{I}$, quando il suo punto d'applicazione giaccia su $(a_2)$, ha una direzione variabile col suo punto di applicazione, mentre è costantemente parallelo a $\mathbf{i} \wedge (G - O)$ quand'esso sta nel piano principale contenente il baricentro; per $P$ comune ai due piani vale quanto detto al sottocaso precedente.

Vale notare che, posto

$$r = |P - O| \quad r_0 = |G - O|,$$

pei centri di percossa appartenenti alla retta $OG$, secondo che su $(a_1)$ o su $(a_2)$, si ha rispettivamente

$$mr_0r\mathcal{J} = \mathcal{B}\mathcal{C}$$
$$mr_0r = \mathcal{A}$$

dove $\mathcal{J}$ è il momento d'inerzia del solido rispetto alla retta $OG$.

Prima di chiudere la trattazione di questo caso si osservi che i piani $(a_1)$, $(a_2)$ sono i piani polari del baricentro rispetto, ordinatamente, all'ellissoide

$$m(Q-O)\times\sigma(Q-O)=\mathfrak{B}\mathfrak{C}.$$

simile e similmente disposto all'ellissoide d'inerzia per $O$, e alla sfera, di centro $O$,

$$m(Q-O)^2=\mathfrak{A}.$$

A questo punto viene spontaneo il chiederci se il baricentro possa essere autoconiugato rispetto ad una almeno delle predette polarità, nel qual caso esso, come appartenente al relativo piano polare, potrebbe venire ad essere assumibile come punto d'applicazione d'impulso attivo non sollecitante il vincolo. Naturalmente nel caso nostro avremo a limitare la ricerca così: se possibile che il baricentro possa stare su una almeno delle sezioni col piano $(O, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ delle quadriche suddette, esclusi i punti sugli assi $(O, \mathbf{j})$, $(O, \mathbf{k})$ principali appartenenti a questo piano. La risposta è, come vedremo, totalmente negativa.

Tenuto presente che

$$\sigma=\sigma_0-m[(G-O)\wedge]^2,$$

dove $\sigma_0$ è la dilatazione baricentrale d'inerzia, resulta

$$\begin{aligned}\Phi &= m(G-O)\times\sigma(G-O)-\mathfrak{B}\mathfrak{C}=\\ &= 2my_0z_0\mathbf{j}\times\sigma_0\mathbf{k}-m^2y_0^2z_0^2-\mathbf{j}\times\sigma_0\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}\times\sigma_0\mathbf{k}\end{aligned}$$

e, per essere

$$\mathbf{j}\times\sigma_0\mathbf{k}-my_0z_0=0,$$

ancora

$$\begin{aligned}\Phi &= (\mathbf{j}\times\sigma_0\mathbf{k})^2-\mathbf{j}\times\sigma_0\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}\times\sigma_0\mathbf{k}=-(\mathbf{j}\wedge\mathbf{k})\times(\sigma_0\mathbf{j}\wedge\sigma_0\mathbf{k})=\\ &= \mathbf{i}\times R\sigma_0\mathbf{i}=-\mathbf{i}\times\mathfrak{B}_0\mathfrak{C}_0\mathbf{i}=-\mathfrak{B}_0\mathfrak{C}_0\end{aligned}$$

dove $\mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{C}_0$ sono i momenti principali baricentrali d'inerzia relativi alle direzioni giacenti nel piano $(O, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ giacchè $\mathbf{i}$ è direzione principale baricentrale (direzione unita per $\sigma_0$). Da quanto sopra resulta che il baricentro è interno all'ellissoide pocanzi considerato.

Che $G$ sia interno pure alla sfera resulta subito dall'aversi

$$\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_0+mr_0^2,$$

dove $\mathfrak{A}_0$ è il momento baricentrale d'inerzia relativo ad $\mathbf{i}$.

Resulta pertanto completamente provato l'asserto che $G$ non può essere assunto come centro d'impulso non sollecitante il vincolo.

**3.** Passiamo adesso alla considerazione dei sottocasi che dal precedente discendono:

1) Se l'ellissoide d'inerzia è di rotazione e la retta $OG$ non è direzione principale (baricentrale) d'inerzia, non si ha sostan-

zialmente un caso diverso da quello or ora trattato: basta, nelle formule ivi considerate, sostituire $\mathfrak{B}$ con $\mathfrak{A}$, che gli è eguale, per ottenere risultati analoghi.

2) Se l'ellissoide d'inerzia non è di rotazione e la retta $OG$ è direzione principale (baricentrale) d'inerzia, la $\Gamma$ degenera in una coppia di piani paralleli normali alla direzione considerata.

Infatti per $G$, ad esempio, sulla retta $(O, \mathbf{k})$, essendo

$$\sigma(G-O) = \mathfrak{C}(G-O),$$

la $\Gamma$ degenera nella coppia

$$(c_1) \qquad m(P-O) \times (G-O) = \mathfrak{B}$$

$$(c_2) \qquad m(P-O) \times (G-O) = \mathfrak{A}.$$

Per $P$ nel piano $(c_1)$, la omografia (3) viene a scriversi

$$m\mathfrak{C}H[(G-O), \sigma(P-O)] + \mathfrak{B}\mathfrak{C}(\mathfrak{A}-\sigma)$$

onde per essa: $\mathbf{i}$ è direzione nulla, mentre tale non può esserlo mai $\mathbf{j}$.

Per $P$ sul piano $(c_2)$, la stessa (3) viene a scriversi

$$m\mathfrak{C}H[(G-O), \sigma(P-O)] + \mathfrak{A}\mathfrak{C}(\mathfrak{B}-\sigma)$$

per cui: $\mathbf{j}$ è direzione nulla, ciò che non può essere $\mathbf{i}$. Pertanto:

L'impulso $\mathbf{I}$, per $P$ giacente sopra uno dei piani $(c_1)$, $(c_2)$, deve esser parallelo alla direzione principale corrispondente al momento che trovasi espresso nell'altro.

3) Se l'ellissoide d'inerzia è di rotazione e la retta $OG$ è direzione principale (baricentrale) d'inerzia giacente sul suo piano equatoriale non si ha sostanzialmente un caso diverso dal precedente: basta, nelle formule considerate ivi, sostituire $\mathfrak{C}$ con $\mathfrak{B}$, che gli è eguale per ottenere risultati analoghi. Circa il resultato finale, restando le $(c_1)$, $(c_2)$ inalterate, avremo a dire:

L'impulso $\mathbf{I}$, per $P$ giacente sul piano $(c_1)$, deve esser parallelo all'asse di rotazione dell'elissoide; per $P$ giacente sul piano $(c_2)$, deve avere direzione equatoriale e normale alla retta $OG$.

4) Se l'ellissoide d'inerzia è di rotazione e la retta $OG$ è la direzione principale (baricentrale) d'inerzia asse di rotazione del medesimo, la $\Gamma$ degenera in un piano doppio normale a quella direzione.

Sia, ad esempio, $G$ nella retta $(O, \mathbf{k})$, le equazioni $(c_1)$, $(c_2)$, per $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$, ci conducono al piano doppio

$$m(P-O) \times (G-O) = \mathfrak{A},$$

è subito visto allora che:

L'impulso $\mathbf{I}$ può avere qualsiasi direzione equatoriale.

5) Se l'ellissoide d'inerzia è una sfera non si ha sostanzialmente un caso diverso dal precedente e circa il resultato finale avremo a dire:

L'impulso **I** può avere qualsiasi direzione normale alla retta $OG$.

**4.** Circa il caso generale in cui $\Gamma$ sia un vero e proprio paraboloide iperbolico, dall'osservare le sue sezioni coi tre piani principali d'inerzia per $O$, discendono senz'altro le seguenti proprietà ch'io mi limito ad enunciare:

Il triedro dei piani principali d'inerzia per $O$ è tangente a $\Gamma$.

Dei due sistemi di rette di $\Gamma$ l'uno è parallelo al piano

$$(Q - O) \times (G - O) = 1$$

e l'altro è parallelo al piano

$$(Q - O) \times \sigma(G - O) = 1.$$

Ovvero:

Dei due sistemi di rette di $\Gamma$ l'uno è normale a $G - O$, l'altro è normale a $\sigma(G - O)$. Indicando con $\Gamma(G, P)$ il primo membro della (2), si può scrivere senz'altro la relazione di simmetria

$$\Gamma(G, P) = \Gamma(P, G)$$

ed enunciare il seguente:

Teorema di reciprocità. Il baricentro del solido appartiene alle

$$\Gamma(Q, P) = 0$$

relative a tutti i punti $P$ di $\Gamma$.