

---

# BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

LETTERIO TOSCANO

## Formule limiti sui polinomi di Laguerre

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2,*  
Vol. 1 (1939), n.4, p. 337–339.

Unione Matematica Italiana

<[http:  
//www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_1939\\_2\\_1\\_4\\_337\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_4_337_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

*SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione  
Matematica Italiana, 1939.

## Formule limiti sui polinomi di Laguerre.

Nota di LETTERIO TOSCANO (a Messina).

**Sunto.** - Si studia una formula limite tra i polinomi di LAGUERRE e di HERMITE, e per analogia si richiamano altri risultati noti.

### 1. L'equazione differenziale

$$(1) \quad (a_0 + a_1 x)y'' + (b_0 - x)y' + ny = 0 \quad a_1 \neq 0.$$

come risulta da ricerche più generali, può ricondursi all'altra

$$(2) \quad xy'' + (x - x + 1)y' + ny = 0.$$

relativa ai polinomi di LAGUERRE

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha} e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+\alpha} e^{-x});$$

e quindi la soluzione polinomiale della (1) è

$$ca_1^n L_n \left( \frac{a_1 x + a_0}{a_1^2} \right).$$

con  $c$  costante.

Posto  $a_0 = \frac{1}{2}$ ,  $b_0 = (k+1)a_1$ , con  $k$  diverso o uguale a zero, risulta che l'equazione

$$\left( \frac{1}{2} + a_1 x \right) y'' + [(k+1)a_1 - x]y' + ny = 0$$

ha la soluzione polinomiale

$$ca_1^n L_n \left( \frac{x}{a_1} + \frac{1}{2a_1^2} \right).$$

e per  $a_1 \rightarrow 0$  si ha ancora che la soluzione polinomiale dell'equazione

$$(3) \quad y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

è

$$\lim_{a_1 \rightarrow 0} \left[ ca_1^n L_n \left( \frac{x}{a_1} + \frac{1}{2a_1^2} \right) \right].$$

Ma la (3) è soddisfatta dai polinomi di HERMITE

$$H_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2},$$

e vale quindi la formula limite (4)

$$(4) \quad H_n(x) = 2^n n! \lim_{a_1 \rightarrow 0} \left[ a_1^n L_n \left( \frac{x}{a_1} + \frac{1}{2a_1^2} \right) \right],$$

che per  $k=0$  diventa semplicemente

$$(5) \quad H_n(x) = 2^n n! \lim_{a_1 \rightarrow 0} \left[ a_1^n L_n \left( \frac{x}{a_1} + \frac{1}{2a_1^2} \right) \right]$$

Le precedenti si possono pure scrivere nella forma

$$(4') \quad H_n \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2}^n n! \lim_{a \rightarrow 0} \left[ a^n L_n \left( \frac{x}{a} + \frac{1}{a^2} \right) \right]$$

$$(5') \quad H_n \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2}^n n! \lim_{a \rightarrow 0} \left[ a^n L_n \left( \frac{x}{a} + \frac{1}{a^2} \right) \right].$$

2. Il procedimento qui seguito, e che consiste nel ricavare il polinomio  $H_n(x)$  da altro più generale con un passaggio al limite, è stato già applicato da altri per esprimere  $H_n(x)$  dai polinomi sferici, e di più ANGELESCO in una sua memoria (2) ha assegnato una classe di infiniti polinomi che si riducono come caso limite a quelli di HERMITE.

Sempre con lo stesso procedimento, in una Monografia di P. HUMBERT (3) si trova la formula

$$x^{\frac{\nu}{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\Gamma(\nu + n + 1)} L_n^{(\nu)} \left( \frac{x}{n} \right) = J_\nu(2\sqrt{x}),$$

(1) Il caso  $k=-1$  si trova in PALAMÀ, *Sulla soluzione polinomiale della*  $(a_1x + a_0)y'' + (b_1x + b_0)y' - nb_1y = 0$ , questo « Bollettino », Fasc. I, 1939.

(2) A. ANGELESCO, *Sur des polynomes généralisant les polynomes de Legendre et d'Hermite...*, « Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris », Paris 1916.

(3) P. HUMBERT, *Monographie des polynomes de Kummer*, « Nouvelles Annales de Mathématiques » 5<sup>e</sup> serie, t. 1, 1922.

con  $J_\nu$  funzione di BESSEL di prima specie e ordine  $\nu$ ; e questa per la relazione di EULERO (4)

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)!}{z(z+1)\dots(z+n-1)} n^z$$

risulta equivalente all'altra

$$x^{\frac{\nu}{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\nu} L_n^{(\nu)}\left(\frac{x}{n}\right) = J_\nu(2\sqrt{x}), \quad (\nu > -1, x > 0),$$

trovata dal TRICOMI (5) con considerazioni diverse.

(4) WHITTAKER and WATSON, *Modern Analysis*, Cambridge 1935, p. 237.

(5) F. TRICOMI, *Sulla formula d'inversione di Widder*, « Rend. R. Acc. Naz. Lincei », serie 6<sup>a</sup>, vol. XXV, 1936,