Bollettino Unione Matematica Italiana

Giuseppe Zwirner

Un'osservazione su un problema ai limiti per le equazioni differenziali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2, Vol. **1** (1939), n.4, p. 334–336.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_4_334_0>

Un'osservazione su un problema ai limiti per le equazioni differenziali.

Nota di GIUSEPPE ZWIRNER (a Padova).

Sunto. - *Deduzione elementare di un teorema sulle equazioni differenziali ordinarie.*

È noto che *l'equazione*

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} dt \int_{x_0}^{t} f(u, y(u), y'(u))du + y_0 + \tag{1}$$

$$+ \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} [y_1 - y_0 - \int_{x_0}^{x_1} dt \int_{x_0}^{t} f(u, y(u), y'(u))du]$$

ammette sempre una soluzione, y(x), *assolutamente continua insieme con* y'(x), *se* f(x, y, y') *è funzione reale delle variabili reali* x, y, y', *continua rispetto a* y, y', *misurabile rispetto a* x *nello strato*

$$S: \qquad x_0 \leq x \leq x_1, \quad -\infty < y < +\infty, \quad -\infty < y' < +\infty.$$

riuscendovi inoltre

$$|f(x, y, y')| < \psi(x),$$

con $\psi(\mathrm{x}) \geq 0$ *sommabile e ovunque finita* (1) *in* $\mathrm{x}_0 \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{x}_1$, *mentre* y_0 *e* y_1 *sono numeri arbitrariamente prefissati.*

Questo teorema è stabilito da SCORZA DRAGONI (2) utilizzando procedimenti dovuti a BIRKHOFF, KELLOG e CACCIOPPOLI. Se $f(x, y, y')$ è lipschitziana rispetto a y, y' in ogni regione limitata di S, il teorema stesso si dimostra facilmente esaminando le soluzioni della

$$y(x) = y_0 + \bar{y}'(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} dt \int_{x_0}^{t} f(u, y(u), y'(u)) du$$

e considerando il valore di queste soluzioni nel punto x_1 in funzione di $\bar{y}'$ (3).

Nella presenta Nota mi propongo di far vedere, applicando noti procedimenti di approssimazione, che da questo caso si può dedurre il teorema più generale già ricordato.

1. Per dimostrare il teorema enunciato definiamo innanzi tutto le funzioni approssimanti $f_n(x, y, y')$ nel modo che segue.

Si decomponga ogni piano $x = \bar{x}$, con $x_0 \leq \bar{x} \leq x_1$, in quadrati mediante le rette $y = \frac{r}{n}$, $y' = \frac{r}{n}$, $r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; e si suddivida poi ciascun quadrato mediante la diagonale parallela alla retta $y = y'$. In ciascuno dei triangoli così ottenuti $f_n(x, y, y')$ sarà definita dalla condizione di essere lineare in y, y' ed uguale a $f(y, y, y')$ nei vertici del triangolo che si considera. Vale a dire, se tali vertici sono (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_1), (ξ_2, η_2) o (ξ_1, η_1), (ξ_1, η_2), (ξ_2, η_2), con $\xi_1 < \xi_2$, $\eta_1 < \eta_2$, porremo rispettivamente

$$\begin{aligned} f_n(x, y, y') = n \{ [f(x, \xi_2, \eta_1) - f(x, \xi_1, \eta_1)](y - \xi_1) + \\ + [f(x, \xi_2, \eta_2) - f(x, \xi_2, \eta_1)](y' - \eta_1) \} + f(x, \xi_1, \eta_1); \\ f_n(x, y, y') = n \{ [f(x, \xi_2, \eta_2) - f(x, \xi_1, \eta_2)](y - \xi_1) + \\ + [f(x, \xi_1, \eta_2) - f(x, \xi_1, \eta_1)](y' - \eta_1) \} + f(x, \xi_1, \eta_1). \end{aligned}$$

(1) Quest'ultima condizione non porta, evidentemente, restrizioni essenziali.

(2) G. SCORZA DRAGONI, *Elementi uniti di trasformazioni funzionali e problemi di valori ai limiti* [« Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Roma », serie IV, vol. 2 (1938), pp. 255-275], pag. 266. Per altre indicazioni bibliografiche rimando il lettore al lavoro citato di SCORZA DRAGONI.

(3) La funzione in discorso è definita univocamente ed è continua per ogni $\bar{y}'$; cfr. C. CARATHÉODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen* [Teubner, Lipsia, 1ª ed. (1918)], §§ 576-582.

Le $f_n(x, y, y')$ così costruite risultano, evidentemente, in tutto S, continue rispetto a (y, y'), misurabili rispetto ad x, soddisfanno alla

$$|f_n(x, y, y')| < \psi(x) \tag{2}$$

e verificano inoltre la condizione di LIPSCHITZ

$$|f_n(x, \bar{y}_1, \bar{y}'_1) - f_n(x, \bar{y}_2, \bar{y}'_2)| < 2n\psi(x)\,\{|\bar{y}_1 - \bar{y}_2| + |\bar{y}'_1 - \bar{y}'_2|\}.$$

In tali condizioni l'equazione

$$y_n(x) = \int_{x_0}^{x} dt \int_{x_0}^{t} f_n(u, y_n(u), y'_n(u))du + y_0 + \tag{3}$$

$$+ \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\left[y_1 - y_0 - \int_{x_0}^{x_1} dt \int_{x_0}^{t} f_n(u, y_n(u), y'_n(u))du\right]$$

ammette, come si è detto, almeno una soluzione $y_n(x)$ assolutamente continua in $x_0 \leq x \leq x_1$ assieme alla sua derivata prima. Tali soluzioni, per la (2), soddisfanno (in quasi tutto $x_0 \leq x \leq x_1$) alla

$$|y''_n(x)| < \psi(x); \tag{4}$$

e quindi, per le condizioni ai limiti, alle

$$|y_n(x)| < H, \quad |y'_n(x)| < H,$$

con H costante positiva opportuna.

Di qui e dalla (4) segue subito che le $y_n(x)$ e $y'_n(x)$ sono equicontinue ed equilimitate. Scegliamo allora i numeri naturali $n_1, n_2, \ldots$ in modo che le successioni $Y_p(x) = y_{n_p}(x)$, $Y'_p(x) = y'_{n_p}(x)$ convergano uniformemente in tutto $x_0 \leq x \leq x_1$ verso due funzioni limiti $Y(x)$, $Y'(x)$, con $Y'(x)$ derivata di $Y(x)$, e poniamo $g_p(x, y, y') = f_{n_p}(x, y, y')$. Sarà, $\lim\limits_{p \to \infty} g_p(x, y, y') = f(x, y, y')$ uniformemente in ogni regione limitata e per ogni x fissato; per ogni x fissato e in ogni regione limitata di variabilità di y e y', le $g_p(x, y, y')$ sono quindi equicontinue; se ne trae

$$\lim_{p \to \infty} [g_p(x, Y_p(x), Y'_p(x)) - f(x, Y(x), Y'(x))] =$$
$$= \lim_{p \to \infty} [g_p(x, Y_p(x), Y'_p(x)) - g_p(x, Y(x), Y'(x))] +$$
$$+ \lim_{p \to \infty} [g_p(x, Y(x), Y'(x)) - f(x, Y(x), Y'(x))] = 0.$$

Essendo $|g_p(x, Y_p(x), Y'_p(x))| < \psi(x)$, si potrà nelle (3) passare al limite sotto il segno d'integrale, facendo tendere n all'infinito percorrendo la successione $n_1, n_2, \ldots$; e si viene così a riconoscere che l'equazione (1) è soddisfatta da $Y(x)$.