BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA
ITALIANA

FRANCESCO SICARDI

Unicità della soluzione di un'equazione a derivate parziali del 4° ordine a caratteristiche multiple

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2, Vol. **1** (1939), n.4, p. 331–334.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_4_331_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1939.

Unicità della soluzione di un'equazione a derivate parziali del 4° ordine a caratteristiche multiple.

Nota di FRANCESCO SICARDI (a Torino).

Sunto. - *Si considera l'equazione differenziale del 4° ordine a derivate parziali, a caratteristiche multiple* $\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} - 2\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ *ottenuta moltiplicando simbolicamente per sè stessa l'equazione* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.
Si dimostra l'unicità della soluzione di tale equazione in un campo T *limitato da un contorno* s *e da un segmento di caratteristica* l (y = cost.) *quando si assegnino su* s *i valori di* z *e di* $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Fra le equazioni del 4° ordine di tipo parabolico considero quella ottenuta moltiplicando simbolicamente per sè stesso il primo membro dell'equazione del calore

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y}$$

studiata in modo completo da E. E. LEVI, da HOLMGREN e da altri.

L'equazione si può pensare ottenuta applicando alla funzione z l'operatore

$$\delta z = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y}\right) z.$$

Si consideri ora l'equazione

$$\delta\delta z = 0$$

ossia esplicitamente

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} - 2\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

Fra le equazioni paraboliche essa occupa per così dire lo stesso posto dell'equazione

$$\Delta \cdot \Delta z = 0; \quad \Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

fra le equazioni ellittiche.

Non credo senza interesse segnalare un problema di unicità valido per questa equazione in condizioni molto generali: le equazioni di tipo parabolico presentano in genere difficoltà assai gravi relativamente alle dimostrazioni di unicità e di esistenza. D'altra parte alcune equazioni di questo tipo si presentano in varie questioni di fisica-matematica, come ad es. l'equazione

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \tag{2}$$

trattata dal LEVI-CIVITA a proposito di un problema di idrodinamica e da lui risolta in un caso particolare ([1]).

E. FUBINI GHIRON ha dato una dimostrazione più generale di unicità per l'equazione (2) ([2]), che richiede però l'applicazione del lemma di ALMANSI ([3]), e limita quindi in certo senso la generalità del risultato.

La dimostrazione di unicità relativa all'equazione (1) si fonda sullo stesso metodo seguito dal LEVI-CIVITA e dal FUBINI, ma non richiede l'applicazione del lemma di ALMANSI.

Si consideri un campo Γ limitato da un contorno s dotato di tangente variabile con continuità.

La dimostrazione continua a valere anche se s si compone di due o più archi soddisfacenti alla precedente condizione.

Il campo Γ sia poi limitato superiormente da un segmento l di caratteristica ($y=$ cost.). Come è immediato constatare le caratteristiche dell'equazione (1) sono coincidenti nell'unico sistema di rette $y=$ cost.

Dimostrerò che *è unica nel campo* Γ *la soluzione dell'equazione* (1) *che assume su* s *valori assegnati insieme con* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *e* $\frac{\partial z}{\partial y}$.
La (1) è un'equazione lineare: basterà quindi dimostrare che *una* soluzione soddisfacente *lungo* s alle condizioni

$$z=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

è identicamente nulla in Γ.

Si moltiplichi il primo membro dell'equazione (1) per $\frac{\partial z}{\partial y}$; se z

([1]) LEVI-CIVITA, *Attrazione newtoniana dei tubi sottili e vortici filiformi*, « Annali della Scuola Normale di Pisa », serie II, vol. I, 1932, pagg. 1-33, 229-250; « Rend. Acc. Lincei », serie VI, vol. XV, pagg. 409-416.

([2]) FUBINI G., *Un teorema di unicità per l'equazione* $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$, « Rend. Acc. Lincei », serie VI, vol. XVIII, 1933, pagg. 442-444.

([3]) ALMANSI E., *Sopra una delle esperienze di Plateau*, « Ann. di Mat. », vol. XII, (1906), pp. 1-17. Per le generalizzazioni cfr. L. TONELLI, *Su una proposizione dell'Almansi*, « Rend. Acc. Lincei », serie V, vol. XXIII, (1° sem.), pp. 676-682; M. PICONE, *Su una proposizione dell'Almansi*, « Boll. Unione Mat. It. », anno II, pagg. 97-101.

è soluzione di (1) si avrà

$$\iint_{\Gamma} \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} - 2\,\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) dz dy = 0. \tag{3}$$

Integrando per parti con successive applicazioni del lemma di GREEN si ottiene separatamente

$$\iint_{\Gamma} \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}\, dxdy = \int_{(s+l)} \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\, dy - \iint_{\Gamma} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\, dxdy =$$

$$= \int_{(s+l)} \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\, dy - \int_{(s+l)} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\, dy + \iint_{\Gamma} \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\, dxdy =$$

$$= \int_{(s+l)} \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\, dy - \int_{(s+l)} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\, dy - \frac{1}{2}\int_{(s+l)} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 dx;$$

$$-2\iint_{\Gamma} \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\, dxdy = -2\int_{(s+l)} \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\, dy + 2\iint_{\Gamma} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 dxdy;$$

$$\iint_{\Gamma} \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\, dxdy = -\frac{1}{2}\int_{(s+l)} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 dx.$$

Quindi la (3) diventa

$$\int_{(s+l)} \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\, dy - \int_{(s+l)} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\, dy - \frac{1}{2}\int_{(s+l)} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 dx -$$

$$-2\int_{(s+l)} \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\, dy + 2\iint_{\Gamma} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 dxdy - \frac{1}{2}\int_{(s+l)} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 dx = 0$$

e tenendo conto delle condizioni al contorno

$$\begin{aligned}-\left(\int_{(s)} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\, dy + \frac{1}{2}\int_{(s+l)} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 dx\right) + 2\iint_{\Gamma} \left(\frac{\partial z^2}{\partial x \partial y}\right)^2 dxdy\, - \\ -\frac{1}{2}\int_{(l)} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 dx = 0.\end{aligned} \tag{4}$$

Aggiungendo e togliendo $\frac{1}{2}\int_{s} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 dx$ si trova

$$\begin{aligned}-\left(\int_{(s)} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\, dy + \int_{(s)} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 dx\right) + \frac{1}{2}\int_{(s)} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 dx\, - \\ -\frac{1}{2}\int_{(l)} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 dx + 2\iint_{\Gamma} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 dxdy - \frac{1}{2}\int_{(l)} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 dx = 0.\end{aligned} \tag{5}$$

La somma dei due primi termini fra parentesi tonde è nulla; infatti essa è eguale a meno di un fattore diverso da zero a

$$d\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dy$$

che è identicamente nullo su s. Inoltre percorrendo l in senso diretto si ha su l $dx < 0$; indicando quindi con a e b le ascisse dei punti intersezione di l con $s (a < b)$, potremo scrivere la (5) sotto la forma

$$(6) \qquad \frac{1}{2}\int_{(s)}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 dx + 2\iint_{\Gamma}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 dxdy + \frac{1}{2}\int_a^b \left\{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right\} dx = 0.$$

Dall'esame di (6) si può concludere senz'altro che in tutta la regione Γ si ha $z = 0$.

Si noti che la limitazione verso l'alto del campo Γ con il segmento di caratteristica l è del tutto fittizia: in realtà le condizioni al contorno riguardano esclusivamente la curva s; in tal senso si può dire che l'unicità della soluzione per l'equazione (1) è dimostrata in qualunque campo avente s per contorno e aperto verso l'alto.