Luigi Beretta, Luigi Merli

Sulla convergenza in media della formula di interpolazione di Hermite

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2, Vol. **1** (1939), n.4, p. 322–330.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_4_322_0>

Sulla convergenza in media della formula di interpolazione di Hermite.

Nota di L. Beretta e L. Merli (a Firenze) (*).

Sunto. - *Gli A. provano la convergenza in media del polinomio* $X_n[f(x)]$, *dato dalla formula di interpolazione di* Hermite, *verso* $f(x)$, *per tutte le funzioni* $f(x)$ *continue, nel caso che i punti dell'interpolazione siano gli zeri dei polinomi di* Tschebycheff *di seconda specie, purchè i valori* $y'^{(n)}_k$ *della derivata prima di* X_n *in quei punti soddisfino alla relazione* $|y'^{(n)}_k| \leq \varepsilon_n \sqrt{n}$, *con* $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$.

1. Consideriamo il sistema di punti dell'intervallo $(-1, 1)$:

$$A \equiv \left\{ \begin{array}{lllll} x_1^{(1)} & & & & \\ x_1^{(2)}, & x_2^{(2)} & & & \\ x_1^{(3)}, & x_2^{(3)}, & x_3^{(3)} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n)}, & x_2^{(n)}, & x_3^{(n)}, & \dots, & x_n^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right.$$

e il sistema di valori:

$$B \equiv \left\{ \begin{array}{lllll} y_1'^{(1)} & & & & \\ y_1'^{(2)}, & y_2'^{(2)} & & & \\ y_1'^{(3)}, & y_2'^{(3)}, & y_3'^{(3)} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1'^{(n)}, & y_2'^{(n)}, & y_3'^{(n)}, & \dots, & y_n'^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right.$$

Poniamo:

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_n(x) = (x - x_1^{(n)})(x - x_2^{(n)}) \dots (x - x_n^{(n)}), \\ h_k(x) = \left[1 - \dfrac{\omega''_n(x_k^{(n)})}{\omega'_n(x_k^{(n)})}(x - x_k^{(n)})\right]\left[\dfrac{\omega_n(x)}{(x - x_k^{(n)})\omega'_n(x_k^{(n)})}\right]^2, \\ \mathfrak{h}_k(x) = (x - x_k^{(n)})\left[\dfrac{\omega_n(x)}{(x - x_k^{(n)})\omega'_n(x_k^{(n)})}\right]^2, \\ n = 1, 2, \dots;\quad k = 1, 2, \dots, \quad n. \end{array} \right.$$

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Matematico della R. Univ. di Firenze.

Sia $f(x)$ definita in $(-1, 1)$, e poniamo:

$$f(x_k^{(n)}) = y_k^{(n)};$$

allora, come è noto, la formula di interpolazione di HERMITE:

$$X_n[f(x)] = X_n(x) = \sum_1^n {}_k\, y_k^{(n)} h_k(x) + \sum_1^n {}_k\, y_k'^{(n)} \mathfrak{h}_k(x), \qquad n = 1, \dots, \tag{2}$$

dà il polinomio di grado $2n-1$, che nei punti $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ prende ordinatamente i valori $y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \dots, y_n^{(n)}$, e la cui derivata negli stessi punti assume rispettivamente i valori $y_1'^{(n)}, y_2'^{(n)}, \dots, y_n'^{(n)}$. Indicando con $P_r(x)$ un polinomio di grado uguale all'indice, si ha:

$$X_n[P_r(x)] = P_r(x), \qquad \text{se } r \leq 2n-1. \tag{3}$$

Il problema che si è presentato per primo, sull'interpolazione di HERMITE (1), è quello di trovare delle condizioni sui sistemi A e B sulla funzione $f(x)$, per le quali si abbia:

$$\lim_{n\to\infty} X_n(x) = f(x), \quad \text{uniformemente in } (-1, 1). \tag{4}$$

FEJÉR considera, a tale scopo, i punti:

$$x_k^{(n)} + \frac{\omega'_n(x_k^{(n)})}{\omega''_n(x_k^{(n)})}, \qquad \begin{array}{l} n = 1, 2, \dots, \\ k = 1, 2, \dots n, \end{array}$$

da lui detti *i punti coniugati dell'interpolazione di* HERMITE; se essi cadono tutti fuori dell'intervallo $(-1, 1)$, il sistema A si dice *normale*; diremo poi B *limitato*, se esiste un numero Δ tale che:

$$|y_k'^{(n)}| < \Delta, \qquad \begin{array}{l} n = 1, 2, \dots, \\ k = 1, 2, \dots, n. \end{array}$$

Ebbene, FÉJER ha dimostrato (2) che: se *i)* $f(x)$ è continua, *ii)* A è normale, *iii)* B è limitato, vale allora la (4), uniformemente in $(-1, 1)$. Un esempio importante di sistema A normale è quello (3)

(1) Per avere un orientamento preciso sui problemi dell'interpolazione, il lettore può consultare la bella monografia di E. FELDHEIM: *Théorie de la convergence des procédés d'interpolation et de quadrature mécanique*, (« Mém. Sciences Math. », (1939). Paris).

(2) L. FEJÉR, *On the caracterisation of some remarquable systems of points of interpolation by means of coniugate points*, « Amer. Math. Monthly », 41, (1934), p. 1).

(3) L. FEJÉR, *Lagrangesche Interpolation und die zugehörigen koniugierten Punkten*, (« Math, Ann. », 106, 1932), p. 15). Vedi anche: G. SZEGÖ, *Ueber gewisse Interpolationspolynome*, ..., (« Math. Zeit. », 35, (1932), p. 179) e così pure: J. SHOHAT: *On Interpolation*, (« Ann. of Math. », 34, (1933), p. 130).

costituito dagli zeri dei polinomi di JACOBI, per il quale nelle (1) è:

$$\omega_n(x) = J_n(\alpha, \beta, x), \qquad \text{con} \quad \begin{matrix} -1 \leq \alpha < 0, \\ -1 \leq \beta < 0. \end{matrix}$$ (4)

Un secondo problema studiato è quello di trovare delle condizioni per A, B, $f(x)$, che assicurino la convergenza della *formula di quadratura dedotta dalla formula di interpolazione di* HERMITE, ossia che è:

(5) $$\lim_{n \to \infty} \int_{-1}^{1} X_n(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx.$$

Se poi la successione $\{\omega_n(x)\}$, che compare nelle (1), (2) è dedotta a partire da una funzione peso $p(x) \geq 0$ ed integrabile secondo MENGOLY-CAUCHY in $(-1, 1)$, mediante le relazioni

$$\int_{-1}^{1} p(x)\omega_m(x)\omega_n(x)dx = 0, \qquad \text{se } m \neq n,$$

allora, oltre alla (5), si può studiare anche la validità della

(6) $$\lim_{n \to \infty} \int_{-1}^{1} p(x)X_n(x)dx = \int_{-1}^{1} p(x)f(x)dx.$$

Gli studi riguardanti le (5) e (6) sono dovuti a E. FELDHEIM, e si limitano al caso in cui il sistema A è costituito dagli zeri dei *polinomi di* TSCHEBYCHEFF *di seconda specie* (5), ossia dei

(4) Si intende qui per $J_n(\alpha, \beta, x)$, il polinomio di JACOBI corrispondente alla funzione peso $p(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$: cfr. G. POLYA e G. SZEGÖ, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, (Berlin, Springer, (1925), p. 93). Le notazioni di FEJÉR (l. c. in (3)), sono un pò diverse, poichè egli considera $p(x) = (1-x)^{2\alpha-1}(1+x)^{2\beta-1}$.

(5) *di prima specie* sono invece i polinomi $T_n(x) = J_n\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, x\right) = \cos n\vartheta$, $x = \cos\vartheta$, $n = 1, 2, \ldots$, i cui zeri cadono nei punti $x_k^{(n)} = \cos(2k-1)\frac{\pi}{2n}$, $n = 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Se nelle (1) è $\omega_n(x) = T_n(x)$, allora, essendo A normale il teorema sopra citato di FEJÉR (cfr. nota (3)), e quindi, nelle ipotesi sopra enunciate, le (5) e (6) sono senz'altro soddisfatte; anzi, nel teorema citato, in questo caso, si può sostituire la (10) all'ipotesi B limitato, e la (4) continua a valere, uniformemente in $(-1, 1)$. Cfr. L. FEJÉR, *Ueber Weierstrassesche Approximation, besonders durch Hermitesche Interpolation*, (« Math. Ann. », 102, (1930), p. 707); e anche: *Die Abschätzung eines Polynoms...*, (« Math. Zeit. », 32, (1930), p. 426). Sui polinomi $T_n(x)$ cfr. anche E. FELDHEIM, *Sur l'orthogonalité des fonctions fondamentales...*, (« Bull. Soc. Math. de France », 65, (1937), p. 1).

polinomi:

$$(7) \qquad J_n\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x\right) = U_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(n+1)\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta}, \qquad x = \cos\vartheta, \qquad n = 1, 2, \dots, \text{(}^6\text{)}$$

i cui zeri cadono nei punti:

$$(8) \qquad x_k^{(n)} = \cos\frac{k\pi}{n+1}, \qquad \begin{matrix} n = 1, 2, \dots, \\ k = 1, 2, \dots, n, \end{matrix}$$

è quindi:

$$(9) \qquad \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, U_n^2(x)dx = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, U_m(x)U_n(x)dx = 0, \quad \text{se } m \neq n.$$

Per il sistema A, nel caso $\omega_n(x) = U_n(x)$, non è applicabile il teorema di FEJÉR sopra citato, si ha invece che, se: *i*) nelle (1) è $\omega_n(x) = U_n(x)$, *ii*) $f(x)$ è continua, *iii*) B soddisfa alla relazione:

$$(10) \qquad |y_k'^{(n)}|\sqrt{1-x^2} \leq \varepsilon_n \frac{n}{\log n}, \text{ con } \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0, \qquad \begin{matrix} n = 1, 2, \dots, \\ k = 1, 2, \dots, n, \end{matrix}$$

allora, preso un numero δ, $0 < \delta < 1$, il polinomio $X_n(x)$ fornito dalla (2) soddisfa alla relazione:

$$\lim_{n\to\infty} X_n(x) = f(x), \qquad \text{uniformemente in } (-1+\delta, 1-\delta) \text{ (}^7\text{)}$$

E. FELDHEIM ha poi dimostrato che se *i*) nelle (1) è $\omega_n(x) = U_n(x)$, *ii*) B è limitato, *iii*) $f(x)$ è continua, allora valgono le (5) e (6), che in questo caso divengono:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} X_n(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, X_n(x)dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, f(x)dx$$

e ha fatto vedere che si ha anche:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} X_n(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)dx \text{ (}^7\text{)}.$$

Procedendo in questo ordine di idee, e in analogia con gli studi relativi all'interpolazione di LAGRANGE [8], gli A. si sono proposti di studiare *la convergenza in media della formula di interpolazione di* HERMITE, nel caso delle ascisse di TSCHEBYCHEFF di seconda specie, ed hanno stabilito il seguente teorema:

[6] Cfr. E. FELDHEIM, *Recherches sur l'interpolation...*, (« Math. Zeit. », 66, (1938), p. 79).

[7] Cfr. l. c. in [6].

[8] Cfr. P. ERDÖS e P. TURAN, *On interpolation*, I, (« Ann. of Math. », 38, (1937), p. 142).

Se i) *nelle* (1) *è* $\omega_n(x) = U_n(x)$, ii) *il sistema* B *soddisfa all'ipotesi:*

$$|y_k'^{(n)}| \leq \varepsilon_n \sqrt{n}, \qquad \text{con} \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0, \tag{11}$$
$$n = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots, n,$$

iii) f(x) *è continua, allora è:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,[X_n(x) - f(x)]^2 dx = 0. \tag{12}$$

Per la dimostrazione del teorema gli AA. si valgono in larga misura degli studi di E. FELDHEIM, (cfr. l. c.), al quale è dovuto il nuovo metodo, assai utile per la ricerca, dello sviluppo delle funzioni $h_k(x)$, $\mathfrak{h}_k(x)$ per i polinomi $\omega_n(x)$.

2. LEMMA I. - *Posto:*

$$S_1 = \sum_{k,l}^{1\dots n} \left| \sum_{1}^{2n}{}_r \left(2 - \frac{r}{n+1}\right)^2 \operatorname{sen} \frac{kr\pi}{n+1} \operatorname{sen} \frac{lr\pi}{n+1} \right|,$$

si ha:

$$S_1 < c_1 n^2, \tag{13}$$

con c_1 *costante assoluta.*

Basterà dimostrare, invece della (13), la

$$S_2 < c_2 n^2, \tag{14}$$

ove si è posto

$$S_2 = \sum_{k,l}^{1\dots n}{}' \left| \sum_{1}^{2n}{}_r \left(2 - \frac{r}{n+1}\right)^2 \operatorname{sen} \frac{kr\pi}{n+1} \operatorname{sen} \frac{lr\pi}{n+1} \right|, \tag{15}$$

dove, qui e nel seguito, l'apice nel simbolo di somma sta ad indicare che non si prendono i termini con $k = 1$. Infatti i termini così trascurati sono n, ed ognuno di essi è, in valore assoluto, minore di $8n$, perciò la parte trascurata è minore di $8n^2$. Posto:

$$S_3 = \sum_{k,l}^{1\dots n}{}' \left| \sum_{1}^{2n}{}_r \operatorname{sen} \frac{kr\pi}{n+1} \operatorname{sen} \frac{lr\pi}{n+1} \right|,$$

$$A_\alpha = \sum_{k,l}^{1\dots n}{}' \left| \sum_{1}^{2n}{}_r r^\alpha \cos \frac{(k+l)r\pi}{n+1} \right|,$$

$$B_\alpha = \sum_{k,l}^{1\dots n}{}' \left| \sum_{1}^{2n}{}_r r^\alpha \cos \frac{(k-l)r\pi}{n+1} \right|, \qquad \alpha = 1, 2,$$

dalla (15), svolgendo il quadrato ed applicando la formula di prostaferesi, si ha:

$$S_2 \leq 4S_3 + \frac{2}{n+1}(A_1 + B_1) + \frac{1}{(n+1^2)}(A_2 + B_2).$$

Per dimostrare la (13) basterà dunque far vedere che è:

(16) $$S_3 < C_3 n^2;\quad A_1,\ B_1 < C_3 n^3;\quad A_2,\ B_2 < C_3 n^4,$$

con C_3 costante assoluta.

Ora si ha [9]:

$$\left|\sum_{1}^{2n}{}_r \operatorname{sen}\frac{kr\pi}{n+1}\operatorname{sen}\frac{lr\pi}{n+1}\right| = \left|\sum_{n+1}^{2n}{}_r \operatorname{sen}\frac{kr\pi}{n+1}\operatorname{sen}\frac{lr\pi}{n+1}\right| =$$

$$= \left|\sum_{1}^{n}{}_r \operatorname{sen}\frac{k(r+n)\pi}{n+1}\operatorname{sen}\frac{l(r+n)\pi}{n+1}\right| = \left|\sum_{1}^{n}{}_r \operatorname{sen}\frac{k(r-1)\pi}{n+1}\operatorname{sen}\frac{l(r-1)\pi}{n+1}\right| =$$

$$= \left|\operatorname{sen}\frac{kn\pi}{n+1}\operatorname{sen}\frac{ln\pi}{n+1}\right| \leq 1,$$

da cui segue

(17) $$S_3 \leq n^2.$$

Si ha poi [10]:

$$\left|\sum_{r}^{1\ldots 2n} r\cos\frac{(k\pm l)r\pi}{n+1}\right| = \left|n-(4n+2)\cos^2\frac{(k\pm l)\pi}{2(n+1)}\right| \leq 4\,n,$$

da cui segue:

(18) $$A_1,\ B_1 \leq 4n^3.$$

Analogamente [11]:

$$\left|\sum_{r}^{1\ldots 2n} r^2\cos\frac{(k\pm l)r\pi}{(n+1)}\right| = \left|\frac{(2n+1)\left[\cos\frac{(k\pm l)\pi}{n+1}+\cos\frac{3(k\pm l)\pi}{n+1}\cos\frac{(k\pm l)\pi}{2(n+1)}\right]}{4\operatorname{sen}^2\frac{(k\pm l)\pi}{2(n+1)}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\operatorname{sen}\frac{(2n+1)(k\pm l)\pi}{n+1}\cos\frac{(k\pm l)\pi}{2(n+1)}}{4\operatorname{sen}^3\frac{(k\pm l)\pi}{2(n+1)}}+\frac{(2n+1)(4n+1)\operatorname{sen}\frac{(4n+1)(k\pm l)\pi}{2(n+1)}}{4\operatorname{sen}\frac{(k\pm l)\pi}{2(n+1)}}\right| \leq$$

$$\leq \frac{n+1}{\operatorname{sen}^2\frac{(k\pm l)\pi}{2(n+1)}} + (2n+1)(4n+1).$$

[9] Si tenga conto che: $\Sigma_{1}^{n}{}_r \operatorname{sen}\frac{kr\pi}{n+1}\operatorname{sen}\frac{lr\pi}{n+1} = 0$, cfr. ad es. L. TONELLI: *Serie trigonometriche*. (Zanichelli (1928), p. 145).

[10] Il valore di $\Sigma_{N}^{1}{}_k k^\alpha\cos k\vartheta$, $\Sigma_{N}^{1}{}_k k^\alpha \operatorname{sen} k\vartheta$, $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$ si ottiene facilmente, quando, nella identità $1+z+z^2+\ldots+z^N = \frac{1-z^{N+1}}{1-z}$, si faccia $z = e^{i\vartheta}$, si separi la parte reale dall'immaginaria, e si derivino le formule ottenute α volte.

[11] Cfr. nota [10].

e per dimostrare l'ultima delle (16) basterà dunque far vedere che

$$(19) \qquad \sum_{l,k}^{1\dots n}{}' \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{(k \pm l)\pi}{2(n+1)}} < C_4 n^3, \qquad \text{con } C_4 \text{ costante assoluta.}$$

Supponiamo dapprima:

$$k + l \leq n + 1. \quad k \neq l, \quad k, \ l = 1, 2, \dots, n.$$

Allora [12]:

$$(20) \quad \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{(k \pm l)\pi}{2(n+1)}} = \frac{4}{\pi^2}\left[\operatorname{sen}^2 \frac{(k \pm l)\pi}{2(n+1)} \Big/ \left(\frac{(k \pm l)\pi}{2(n+1)}\right)^2\right]^{-1} \frac{(n+1)^2}{(k \pm l)^2} \leq \frac{(n+1)^2}{(k \pm l)^2}$$

Se poi:

$$l + k > n + 1, \quad (k, \ l = 1, 2, \dots, n),$$

si ha analogamente:

$$(21) \quad \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{(k+l)\pi}{2(n+1)}} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \left[1 - \frac{1}{2}\frac{l+h}{(n+1)}\right]\pi} \leq \frac{(n+1)^2}{(2n+2-l-k)^2};$$

e poichè:

$$\sum_{l,k}^{1\dots n}{}' \frac{1}{(l-k)^2} = \sum_{l}^{1\dots n}{}' \left(\sum_{k}^{1\dots n}{}' \frac{1}{(l-k)^2}\right) \leq \sum_{t}^{1\dots n} \left(\sum_{2}^{\infty}{}_k \frac{1}{k^2}\right) = \frac{\pi^2}{6} n.$$

e, analogamente,

$$\sum_{l,k}^{1\dots n}{}' \frac{1}{(2n+2-l-k)^2} \leq \frac{\pi^2}{6} n,$$

avuto riguardo alle (20) e (21), segue la (19). Mediante le (17), (18), (19), la (16) è così interamente provata.

3. Lemma II. - *Se nelle* (1) *è:*

$$\omega_n(x) = U_n(x),$$

posto:

$$(22) \qquad S = \sum_{k,l}^{1\dots n} \left| \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, h_k(x) h_l(x) dx \right|,$$

si ha:

$$(23) \qquad S < c_5,$$

con c_5 *costante assoluta.*

[12] Se $|\alpha| \leq \frac{\pi}{2}$, $\left|\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\right| \geq \frac{2}{\pi}$.

Infatti gli sviluppi di FELDHEIM [13] dànno:

(24) $$h_k(x) = \sum_r^{1\dots 2n} a_r^{(k)} U_{r-1}(x),$$

con

(25) $$a_r^{(k)} = \frac{2n+1-r}{(n+1)^2} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{n+1} \operatorname{sen} \frac{kr\pi}{n+1} + \varepsilon_r^{(k)}$$

con

$$|\varepsilon_r^{(k)}| \leq \frac{c_6}{n^2}$$

e c_6 costante assoluta. Per le (24), (25), la (22) diviene:

$$S = \sum_{k,l}^{1\dots n} \left| \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \left(\sum_r^{1\dots 2n} a_r^{(k)} U_{r-1}(x) \right) \left(\sum_r^{1\dots 2n} a_r^{(l)} U_{r-1}(x) \right) dx \right|,$$

da cui, per le (9),

$$\frac{2}{\pi} S = \sum_{k,l}^{1\dots n} \left| \sum_r^{1\dots 2n} a_r^{(k)} a_r^{(l)} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{k,l}^{1\dots n} \left| \sum_r^{1\dots 2n} \left(2 - \frac{r+1}{n+1}\right)^2 \operatorname{sen} \frac{kr\pi}{n+1} \operatorname{sen} \frac{lr\pi}{n+1} \right| + c_6 \leq$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{k,l}^{1\dots n} \left| \sum_r^{1\dots 2n} \left(2 - \frac{r}{n+1}\right)^2 \operatorname{sen} \frac{kr\pi}{n+1} \operatorname{sen} \frac{lr\pi}{n+1} \right| + c_7,$$

e basta ora applicare il Lemma II, e la (23) risulta senz'altro dimostrata.

4. LEMMA III. - *Se nelle* (1) *è;*

$$\omega_n(x) = U_n(x),$$

posto:

$$\overline{S} = \sum_{k,l}^{1\dots n} \left| \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, \sigma_k(x) \sigma_l(x) dx \right|,$$

si ha:

$$\overline{S} < \frac{c_8}{n},$$

con c_8 *costante assoluta.*

Infatti è [14]:

$$\sigma_k(x) = \sum_r^{1\dots 2n-1} b_r^{(k)} U_r(x), \qquad \begin{matrix} n = 1, 2, \dots \\ k = 1, \dots, n, \end{matrix}$$

[13] Cfr. l. c., nota [6].
[14] Cfr. l. c., nota [6].

con

$$|b_2^{(k)}| < \frac{c_9}{n^2},$$

e, operando come al n. 3, si trova:

$$\overline{S} = \frac{\pi}{2} \sum_{k,l}^{1\ldots n} \left| \sum_{r}^{1\ldots 2n-1} b_r^{(k)} b_r^{(l)} \right| < \frac{c_8}{n}.$$

5. Siamo ora in grado di dimostrare il teorema enunciato alla fine del n. 1. Infatti, per l'ipotesi *iii*), scelto un numero $\varepsilon > 0$, per il teorema di WEIERSTRASS ([15]) si può trovare un polinomio di grado opportuno $2n - 1$, tale che in $(-1, 1)$, sia:

$$|f(x) - P_{2n-1}(x)| < \varepsilon. \tag{26}$$

Allora:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,[X_n(x) - f(x)]^2 dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\{[f(x) - P_{2n-1}(x)] - [X_n(x) - P_{2n-1}(x)]\}\,dx \leq$$

$$\leq 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,[f(x) - P_{2n-1}(x)]^2 dx + 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,[X_n(x) - P_{2n-1}(x)]^2 dx \leq$$

$$\leq \pi\varepsilon^2 + 2\int_{-1}^{1} [X_n(x) - P_{2n-1}(x)]^2 \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Posto:

$$f(x) - P_{2n-1}(x) = \psi(x),$$

per la (3), (11), (26), si ha:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,[X_n(x) - P_{2n-1}(x)]^2 dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,X_n^2[\psi(x)]dx \leq$$

$$\leq 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \left(\sum_{1}^{n}{}_k \psi(x_k^{(n)}) h_k(x)\right)^2 dx +$$

$$+ 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \left(\sum_{1}^{n}{}_k y'_k{}^{(n)} \mathfrak{h}_x(x)\right) dx \leq$$

$$\leq 2\varepsilon^2 \sum_{k,l}^{1\ldots n} \left| \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,h_k(x) h_l(x) dx \right| +$$

$$+ 2\varepsilon_n^2 n \sum_{k,l}^{1\ldots n} \left| \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathfrak{h}_k(x) \mathfrak{h}_l(x) dx \right|,$$

e da questa, applicando il II e III Lemma:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,[X_n(x) - f(x)]^2 dx \leq (\pi + 2c_5)\varepsilon^2 + 2\varepsilon_n^2 c_8. \qquad \text{c. v. d.}$$

([15]) Cfr. ad es. Ch. DE LA VALLÉE POUSSIN: *Leçons sur l'approximation des fonctions*. (Gauthier-Villars, Paris (1919), p. 2).