
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

RADU BĂDESCU, R. BADESCU

Sopra una certa serie di Laurent di due variabili

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2,
Vol. 1 (1939), n.4, p. 314-322.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_4_314_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Sopra una certa serie di Laurent di due variabili.

Nota di RADU BADESCU (a Cluj - Romania).

In due Note presentate all'Unione Matematica Italiana ⁽¹⁾, abbiamo studiato un caso particolare dell'equazione integrale di FREDHOLM, estesa nel campo complesso.

$$(1) \quad \Phi(z) - \lambda \int_C K(z, s) \Phi(s) ds = \Psi(z)$$

dove C è una curva analitica, chiusa e delimitante un dominio semplicemente connesso D . Il primo che abbia risolto un'equazione di questa forma, con un nucleo $K(z, s)$ tuttavia molto particolare, è stato il PINCHERLE ⁽²⁾, e il suo studio fu generalizzato dal sig. CINQUINI ⁽³⁾ in due ben noti articoli. Nelle mie Note, avevo fatto alcune osservazioni sul comportamento della soluzione $\Phi(z)$ rispetto alla variabile complessa z da cui essa dipende direttamente, e più tardi ⁽⁴⁾, ho dato alcune condizioni sufficienti affinché i tre teoremi di FREDHOLM siano ancora applicabili all'equazione (1), indicando anche il dominio d'esistenza nel piano z della soluzione generale $\Phi(z)$ ottenuta. In tutti questi lavori, ci siamo limitati alla determinazione delle soluzioni che appartengono al campo delle funzioni olomorfe rispetto a z nel dominio D e meromorfe in tutto il piano λ .

Rammentiamo le ipotesi fatte sulle funzioni note $\Psi(z)$ e $K(z, s)$. Esse erano supposte olomorfe rispetto a z nel dominio chiuso D (qualunque sia s sulla C), il nucleo $K(z, s)$ avendo rispetto ad s un numero finito k di singolarità $s_i = \theta_i(z)$, funzioni di z , a carattere uniforme, tutte interne alla C se z appartiene a D . In queste

(1) « Boll. Unione Mat. Italiana », anno X, n. 4, pag. 217 e anno XI, n. 1, 1932.

(2) « Rendiconti Accademia delle Scienze », Bologna, 1915-16, vol. XX.

(3) « Boll. Unione Mat. Italiana », anno IX, n. 2, 1930, e seg.

(4) « Académie Roumaine des Sciences », XVI année, nn. 4-5 e XVII année, nn. 1-2.

ipotesi [e mediante certe condizioni concernenti la struttura del nucleo $K(z, s)$], tutte le soluzioni di FREDHOLM dell'equazione (1) erano olomorfe rispetto a z in D , risultato ottenuto dallo studio dell'equazione funzionale

$$(2) \quad \Phi(z) - \lambda \sum_{i=1}^k \sum_{n=0}^{\infty} K_{i,n}(z) \left[\frac{d^n \Phi(s)}{ds^n} \right]_{s=\theta_i(z)} = \Psi(z)$$

che ammette le stesse soluzioni olomorfe in z su D che l'equazione (1). Le funzioni $K_{i,n}(z)$ sono i coefficienti delle diverse potenze negative di $[s - \theta_i(z)]$ nella parte principale dello sviluppo di LAURENT relativo al nucleo $K(z, s)$ che è valevole in una corona contenente la curva intera C .

In un recente articolo ⁽⁵⁾, il sig. C. POPOVICI ha introdotto nuove ed interessantissime soluzioni rappresentate da serie di LAURENT rispetto a λ per una certa classe di equazioni integrali e funzionali. Come la maggior parte delle equazioni studiate dal sig. POPOVICI appartengono al tipo (1) e (2), un attento esame delle loro proprietà era necessario, principalmente perchè l'esistenza di queste soluzioni era a prima vista contraddittoria coi tre teoremi di FREDHOLM. In questo articolo, vogliamo mostrare su un esempio particolare, sull'equazione

$$(3) \quad \Phi(z) = \lambda \Phi(\alpha z)$$

la differenza tra le soluzioni di FREDHOLM e quelle dal sig. POPOVICI e, nello stesso tempo, risolveremo alcuni problemi sollevati dallo stesso autore nell'articolo citato. Possiamo supporre nell'equazione (3), senza restringerne la generalità, $|\alpha| < 1$ ⁽⁶⁾, quando i tre teoremi di FREDHOLM sono applicabili all'equazione non omogenea

$$(4) \quad \Phi(z) - \lambda \Phi(\alpha z) = \Psi(z).$$

Secondo i nostri risultati, l'equazione omogenea (3) non può ammettere alcuna soluzione. $\Phi(z)$ ⁽⁷⁾, meromorfa rispetto a λ nel piano intero, e olomorfa in z nella vicinanza dell'origine, punto che ha una grande importanza in questo studio perchè è il punto fisso attrattivo rispetto alla trasformazione $Z = \alpha z$ ⁽⁸⁾. La soluzione del sig. POPOVICI è rappresentata dalla serie di LAURENT

$$(5) \quad \Phi(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda^n q(\alpha^n z)$$

⁽⁵⁾ « Matematica », Cluj, t. IX, 1935, pag. 194.

⁽⁶⁾ Noi omettiamo il caso $|\alpha| = 1$ quando i tre teoremi di FREDHOLM non sono più valevoli.

⁽⁷⁾ Non costante.

⁽⁸⁾ Veggansi le nostre Note citate qui.

nella quale la funzione $q(z)$ è arbitraria (la supporremo analitica per non introdurre delle funzioni con strane singolarità) ma scelta in modo che questa serie converga assolutamente ed uniformemente rispetto a λ , per certi valori di z che saranno precisati più tardi.

In queste ipotesi, si osserva che la soluzione (5) non appartiene al campo delle funzioni meromorfe rispetto a λ nell'intero piano ed olomorfe in z nell'intorno dell'origine.

Noi daremo qui la dimostrazione di questo punto che è la risposta alla questione sollevata dal sig. POPOVICI alla pag. 201 della sua Memoria: « à priori on ne peut pas affirmer cela d'une série (qu'elle ne soit jamais méromorphe dans tout le plan λ) »⁽⁹⁾

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \lambda^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda^n q(\alpha^n z)$$

et nous doutons qu'on puisse le démontrer pour nos solutions vu que les coefficients a_n dépendent d'une fonction arbitraire $q(z)$. N'existe-t-il aucune F , Ψ et z , et aucune fonction arbitraire $q(z)$ qui rende (5) méromorphe en λ (dans tout le plan)⁽⁹⁾ »?

Noi abbiamo scelto qui l'equazione particolare (4) [ed anche la (3)], ma la dimostrazione si estende facilmente anche all'equazione più generale

$$(4') \quad \Phi(z) - \lambda F(z)\Phi(\alpha z) = \Psi(z).$$

Si osserva subito che la soluzione (5) ammette nella vicinanza dell'origine del piano λ almeno un punto singolare essenziale, che può essere anche all'origine, qualunque sia la funzione arbitraria $q(z)$, scelta per la convergenza assoluta ed uniforme, perchè la parte principale dello sviluppo (5) non può ridursi ad un numero finito di termini senza mancar di verificare l'equazione (4).

Infatti, supponiamo che la serie (5) sia dalla forma⁽¹⁰⁾

$$(5') \quad \sum_{n=-m}^{+\infty} \lambda^n q(\alpha^n z)$$

e sostituiamo in questa relazione αz al posto di z . Una moltiplicazione con λ ci dà la funzione⁽¹¹⁾

$$\lambda \Phi(\alpha z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} \lambda^{n+1} q(\alpha^{n+1} z) = \frac{q\left(\frac{z}{\alpha^{m+1}}\right)}{\lambda^{m+1}} + \sum_{n=-m}^{+\infty} \lambda^n q(\alpha^n z)$$

(9) Completata da noi per mantenerci al punto di vista di FREDHOLM. Qui $\Psi(z) \equiv 0$, e $F(z) \equiv 1$.

(10) La parte principale ha soltanto p termini.

(11) Nell'ultima uguaglianza abbiamo posto $n+1 = p$.

che dev'essere, secondo l'equazione (3), identica in λ alla $\Phi(z)$, per z appartenente al dominio di olomorfia della $q(z)$:

$$\sum_{n=-m}^{+\infty} \lambda^n q(\alpha^n z) \equiv \frac{1}{\lambda^{m+1}} q\left(\frac{z}{\alpha^{m+1}}\right) + \sum_{n=-m}^{+\infty} \lambda^n q(\alpha^n z).$$

Questa uguaglianza si scrive ancora, dopo la soppressione della funzione (5'),

$$\frac{1}{\lambda^{m+1}} \cdot q\left(\frac{z}{\alpha^{m+1}}\right) \equiv 0, \quad \text{o} \quad q\left(\frac{z}{\alpha^{m+1}}\right) = 0;$$

dunque la funzione $q(z)$ dev'essere identicamente nulla. Allora, o la soluzione (5') considerata è anch'essa identicamente nulla, o nel caso contrario, essa non verifica l'equazione funzionale (3), perchè $q(z) \neq 0$.

La stessa conclusione si presenta se noi supponiamo che la serie (5), — adesso con una infinità di termini nella parte principale —, è tale che, partendo da un certo ordine m , si abbia

$$\sum_{n=-(m+1)}^{-\infty} \lambda^n q(\alpha^n z) \equiv 0$$

per z appartenente ad una regione di questo piano, quanto piccola si vuole ⁽¹²⁾. Ora, tenendo conto della convergenza assoluta ed uniforme in λ della (5), questa serie non può essere identicamente nulla senza avere

$$(6) \quad q\left(\frac{z}{\alpha^m}\right) = 0, \quad q\left(\frac{z}{\alpha^{m+1}}\right) = 0, \dots$$

Questa è una proprietà ben nota delle serie di LAURENT. Come tutte le condizioni (6) non possono aver luogo che per certi valori fissi di z formanti un insieme numerabile (E), — si può scegliere $q(z)$ in tal modo che l'insieme degli zeri di questa funzione contenga l'insieme (E) —, risulta che la funzione $q(z)$ dev'essere identicamente nulla.

Queste considerazioni ci permettono d'affermare che la soluzione (5) non può ammettere un polo di un qualunque ordine all'origine del piano λ , per z appartenente ad una certa regione (quanto piccola si vuole) senza essere identicamente nulla. La solu-

(12) Se questa serie è nulla, la parte principale della serie (5) contiene un numero finito di termini ed allora, la soluzione (5) è meromorfa in λ nell'intorno dell'origine senza ammettere un punto singolare essenziale in questa regione del piano λ . È chiaro che, in tutte queste considerazioni, abbiamo supposto il parametro λ appartenente ad una certa corona del piano λ , col centro nell'origine.

zione del sig. POPOVICI, dunque, non appartiene al campo delle funzioni meromorfe nell'intero piano λ ; e ancora, essa non appartiene al campo delle funzioni olomorfe in z nella vicinanza dell'origine, il punto fisso attrattivo della trasformazione $Z = \alpha z$. Infatti, supponiamo che $q(z)$ sia una funzione olomorfa in un cerchio c col centro nell'origine e tale che la serie (5) converga assolutamente e uniformemente in questo cerchio, qualunque sia λ appartenente ad una certa regione del suo piano. Queste ipotesi, sufficienti per l'olomorfia all'origine del piano z della soluzione (5), danno come valore in questo punto l'espressione [per $q(0) \neq 0$]

$$q(0) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda^n$$

che non ha senso per alcun valore di λ .

Se $q(z)$ è della forma $z^p \cdot q'(z)$, con $q'(0) \neq 0$, il valore della funzione $z^{-q} \cdot \Phi(z)$ all'origine è dato dall'espressione

$$q'(0) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda \alpha^n)^n$$

che ancora non ha senso per alcun valore di λ .

Se vogliamo fare un'analisi delle singolarità di $\Phi(z)$ nel piano z , si può osservare che esiste una classe di funzioni $q(z)$ per la quale queste singolarità possono esser dedotte in generale da quelle di $q(z)$. Infatti, se z_0 è un punto singolare di $q(z)$ situato a distanza finita, tutti i punti dell'insieme

$$(e) \quad \dots, \frac{z_0}{\alpha^3}, \frac{z_0}{\alpha^2}, \frac{z_0}{\alpha}, z_0, z_0 \alpha, z_0 \alpha^2, z_0 \alpha^3, \dots$$

saranno singolari per la $\Phi(z)$, e l'origine e il punto all'infinito saranno anche singolari per questa soluzione, perchè sono i punti d'accumulazione dell'insieme (e).

Prendiamo adesso in esame la convergenza della serie (5): le condizioni di convergenza assoluta e uniforme si possono scrivere sotto la forma

$$|\lambda| < A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{q(\alpha^{n-1} z)}{q(\alpha^n z)} \right|, \quad |\lambda| < B = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{q\left(\frac{z}{\alpha^n}\right)}{q\left(\frac{z}{\alpha^{n-1}}\right)} \right|$$

dove A dev'essere più grande che B .

1°) I polinomi in z [per $q(z)$] non danno alcuna corona $A > \lambda > B$ dove la serie (5) sia convergente, perchè $A = \frac{1}{|\alpha|^p} < B = \frac{1}{|\alpha|^{p+q}}$, se supponiamo che $q(z) = z^p \cdot (a_0 + \dots + a_p z^p)$.

2°) Le funzioni intere $q(z)$ possono condurre ad una serie (5) assolutamente e uniformemente convergente in λ ($A > B$), ma soltanto in certe regioni del piano z che non contengono l'origine. Nel suo articolo (13) il sig. POPOVICI aveva scelto la seguente funzione

$$(7) \quad q(z) = \frac{e^{z^2} - 1}{1 + a(z)}$$

dove $a(z)$ è un polinomio arbitrario in e^{z^2} di un grado superiore all'unità, e tale che sia, sull'asse reale, $a(z) \neq -1$. Per questa funzione, supponendo $a(z)$ con *coefficienti reali*, α e z *reali*, le condizioni (6) si scrivono

$$0 < |\lambda| < \frac{1}{|\alpha|^z}$$

e la serie (5) converge in ogni corona col centro all'origine del piano λ , che appartiene al cerchio $|\lambda| < \frac{1}{|\alpha|^z}$, qualunque sia z appartenente all'asse reale. Questo esempio sarebbe scelto dal sig. POPOVICI per mostrare che l'origine del piano z è un punto regolare per la funzione $\Phi(z)$ corrispondente? Noi crediamo che, nell'articolo citato, il sig. POPOVICI faccia il suo studio rispetto ad una variabile *complessa* z e non soltanto reale, perchè, in quest'ultimo caso, le nostre ipotesi sarebbero completamente distinte.

Supponendo dunque z complesso, la funzione $\Phi(z)$ definita dalla serie (5) che corrisponde alla funzione (7), ammetterà l'origine del piano z come un punto singolare essenziale benchè, per z reale e tendendo verso quel punto, si ottengano dei valori precisi e ben definiti per $\Phi(z)$. Ora, è ben noto (14) che esistono funzioni che ammettono valori asintotici lungo certe curve che conducono nel loro punto singolare essenziale. L'asse reale si presenta qui come una tale curva lungo la quale la funzione $\Phi(z)$ tende verso un valore asintotico preciso quando z tende verso l'origine, e tutto ciò non vuol dire che la serie (5) definisce una funzione $\Phi(z)$, olomorfa *nell'intorno dell'origine*. Un esempio semplice; prendiamo per $q(z)$ la funzione

$$q(z) = \frac{e^{z^2} - 1}{e^{2z^2} + 1}$$

(13) Loc. cit., pag. 201.

(14) R. NEVANLINNA, *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes*, Gauthier-Villars, Paris, 1929, p. 21.

che appartiene alla classe (7) e che ammette i poli

$$(8) \quad z = \pm \frac{\sqrt{\pi}}{2} (1 + i) \sqrt{1 + 2k} \quad (k, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

tutti situati sulle rette $x^2 - y^2 = 0$. C'è una funzione olomorfa nel cerchio $|z| < \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, che ammette un zero doppio all'origine; tuttavia, la serie (5) non ha alcun senso sull'insieme di punti (E) che appartengono alle rette $x^2 - y^2 = 0$ e che si ottengono prendendo tutti i conseguenti dei punti (8) per l'intermediario dell'operazione $Z = \alpha z$. Dunque, l'origine è un punto singolare essenziale, limite di poli, per la funzione $\Phi(z)$.

Un altro esempio; per $q(z) = z^2 \cdot e^{-z^2}$, funzione intera che possiede le stesse proprietà con le funzioni (7), la serie (5) converge assolutamente e uniformemente rispetto a λ nelle stesse condizioni che la serie precedente (e α reale), per z appartenente allo stesso angolo delle rette $x^2 - y^2 = 0$ che contiene anche l'asse reale, ma è divergente nell'angolo che contiene l'asse immaginario.

3°) Anche le funzioni $q(z)$ razionali non assicurano in generale la convergenza della serie (5). Osservando tuttavia che la parte regolare e la parte principale di questa serie verificano separatamente l'equazione funzionale

$$(4'') \quad \Phi(z) - \lambda \Phi(\alpha z) = \pm q(z)$$

e che, col nostro metodo di prolungamento analitico nel piano λ ⁽¹⁵⁾, il raggio di convergenza in λ della soluzione generale di (4'') aumenta con p, q essendo l'ordine di molteplicità dello zero di $q(z)$ all'origine, si può trovare una classe di funzioni razionali $q(z)$ che assicurino la convergenza della serie (5). Poniamo dunque

$$(9) \quad q(z) = z^m \cdot \frac{a_0 z^p + a_1 z^{p-1} + \dots + a_p}{b_0 z^q + b_1 z^{q-1} + \dots + b_q} \quad (a_p, b_q \neq 0).$$

Avremo i casi seguenti:

a) $m \geq 0 \cdot q(z)$ ha un zero dell'ordine m all'origine. Se $p \geq q$, la serie (5) non può essere convergente in alcuna corona col centro nell'origine del piano λ , per quanto essa sia piccola. Se $p < q$, essa è convergente nella corona

$$|\alpha|^{-m} > |\lambda| > |\alpha|^{q-p-m}$$

che è esterna al cerchio unità. Questo caso è già stato segnalato dal sig. POPOVICI.

⁽¹⁵⁾ Veggasi per esempio: BADESCU, « Mathematica », Cluj, 1931, pp. 36-52.

b) $m < 0 \cdot q(z)$ ha un polo dell'ordine m all'origine, ma questo caso non entra nello studio che facciamo qui perchè la soluzione $\Phi(z)$ corrispondente ha un polo all'origine. Tuttavia, questo caso è interessante da segnalare per la sua analogia col caso $m > 0$. Infatti, se poniamo $m = -m'$ e $q(z) = z^{-m'} \cdot q_1(z)$, la serie corrispondente (5) sarà

$$\Phi(z) = \frac{1}{z^{m'}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{\alpha^{m'}} \right)^n q_1(\alpha^n z)$$

e) convergerà assolutamente e uniformemente in λ nella corona

$$|\alpha|^{m'+q-p} < |\lambda| < |\alpha|^{m'}$$

soltanto se $p < q$. Il caso $p \geq q$ conduce ad una serie divergente.

Dunque, per le funzioni $q(z)$ razionali, è sufficiente di supporre $p < q$, qualsiasi m positivo, negativo o nullo, per ottenere una serie (5) assolutamente e uniformemente convergente in λ .

I risultati esposti qui, ed anche lo studio fatto da noi sull'equazione (4')⁽¹⁶⁾, ci permettono di enunciare per l'equazione funzionale

$$\Phi(z) - \lambda \Phi(\alpha z) = \Psi(z) \quad |\alpha| \neq 1$$

[$\Psi(z)$ olomorfa nella vicinanza dell'origine] tre teoremi analoghi a quelli del FREDHOLM, se ci manteniamo alle soluzioni $\Phi(z)$ che appartengono al campo delle funzioni meromorfe nel piano intero λ o, ciò che è equivalente, olomorfe nella vicinanza dell'origine del piano z .

Quest'ultima asserzione si dimostra facilmente se cerchiamo le soluzioni $\Phi(z)$ della forma

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \Phi_n(\lambda).$$

Otterremo il sistema infinito

$$\Phi_n(1 - \lambda\alpha) = \Psi_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

dove abbiamo posto

$$\Psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \Psi_n$$

lo sviluppo della $\Psi(z)$ nell'intorno dell'origine. La serie ben nota, ottenuta per questa via

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n \Psi_n}{1 - \lambda\alpha^n}$$

è l'unica soluzione appartenente al campo su menzionato se λ è

⁽¹⁶⁾ Loc. cit., « Mathematica », pag. 36, 1931.

distinto dai valori caratteristici $1, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\alpha^n}, \dots$. Le funzioni fondamentali corrispondenti saranno $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$. Abbiamo dunque una *unicità relativa*, per utilizzare i termini introdotti dal sig. POPOVICI, perchè le nuove soluzioni introdotte non appartengono al campo considerato da noi.