Enrico Bompiani

Intorno ad alcune superficie razionali del 4° ordine

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2, Vol. **1** (1939), n.4, p. 305–314.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_4_305_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1939.

SEZIONE SCIENTIFICA

PICCOLE NOTE

Intorno ad alcune superficie razionali del 4° ordine.

Nota di ENRICO BOMPIANI (a Roma).

Sunto. - *Si studiano in modo diretto alcune singolarità di superficie con punto doppio uniplanare, facendone applicazione a superficie del 4° ordine (già studiate da* M. NOETHER, F. CONFORTO, S. FAEDO).

1. **Oggetto della ricerca.** — In alcune Note recenti i Sigg. F. CONFORTO (1) ed S. FAEDO (2) hanno ripreso l'esame di due superficie del 4° ordine razionali incontrate da M. NOETHER: sono le superficie con un punto doppio uniplanare O, dotate di un tacnodo infinitamente vicino O_1 ($F_4^{(2)}$), che eventualmente può contenere il punto O_2 sulla OO_1 infinitamente vicino ad O_1 ($F_4^{(3)}$).

Il CONFORTO si pone dal punto di vista più naturale — proprio della natura del problema — cioè quello della geometria proiettivo-differenziale; ed esamina quali condizioni impongano le singolarità indicate, in O e nei punti infinitamente vicini, ad una superficie F, anche non algebrica (e se algebrica d'ordine qualsiasi), cercando sostanzialmente di costruire l'intorno di O su F in direzione OO_1; e trova che dal punto di vista differenziale la particolarità che conduce, per la F, alla $F_4^{(3)}$ è caso speciale dell'altra che conduce alla $F_4^{(2)}$. Dal punto di vista algebrico invece le $F_4^{(3)}$ non appaiono casi speciali della $F_4^{(2)}$; anzi il CONFORTO determina la classe comune a queste due famiglie di superficie e ritrova sui loro sistemi rappresentativi le particolarità che gli si sono presentate nello spazio.

(1) *Sulle singolarità delle superficie* $F_4^{(2)}$ *ed* $F_4^{(3)}$ di NOETHER. I. *Studio differenziale delle singolarità.* II. *Superficie comuni alle* $F_4^{(2)}$ *ed* $F_4^{(3)}$, « Rendiconti R. Acc. dei Lincei », vol. XXIX (1939).

(2) *Sulla rappresentazione sul piano doppio di due superficie razionali del 4° ordine,* « Bollettino U. M. I. », serie II, anno I, n. 3 (1939).

Il FAEDO invece parte dalla rappresentazione delle superficie sul piano doppio ed esamina come sorgano nei due casi le singolarità della curva di diramazione.

L'interesse suscitato in me dalle ricerche precedenti m'induce a riprendere l'argomento in modo più diretto ed elementare: anche per evitare la considerazione di punti multipli infinitamente vicini che, pur avendo efficacia rappresentativa, non mi lascia sempre del tutto tranquillo. Preferisco sostituire a quelle considerazioni le nozioni precise di numero di punti d'intersezione coincidenti, di ordine di contatto, di invarianti di contatto o d'intersezione.

Riprendo quindi dall'inizio il problema di caratterizzare localmente in O le superficie F tali che le loro sezioni piane per un'assegnata tangente per O abbiano ivi un oscnodo (due rami lineari a contatto del 2° ordine di O, o singolarità più elevata, che sostituisce i tre punti doppi infinitamente vicini). Si trova che le superficie F si dividono in due famiglie (ben riconoscibili dall'effettiva singolarità della sezione piana generica) che, per superficie algebriche di determinato ordine, sono anche di dimensioni differenti. Nel caso delle F_4 una di queste famiglie è costituita da ∞^{21} F_4 contenenti la tangente assegnata, l'altra è quella delle $F_4^{(2)}$ di NOETHER.

L'ulteriore specializzazione che porta alla $F_4^{(3)}$ fa di necessità appartenere queste alla prima famiglia sicchè apparisce ben chiaro come le $F_4^{(3)}$ pur facendo parte della famiglia di F_4 le cui sezioni piane per la tangente fissata hanno un oscnodo, non sono affatto casi particolari delle $F_4^{(2)}$ (ma dell'altra famiglia); la classe comune alle $F_4^{(2)}$ e $F_4^{(3)}$ è quella già determinata dal CONFORTO: qui si mette in evidenza esaminando la singolarità delle sezioni piane sul relativo diagramma di NEWTON.

Passo poi ad esaminare le singolarità delle curve di diramazione nei due casi per mostrare direttamente ch'esse individuano le singolarità delle F_4 col punto doppio uniplanare.

2. Caratterizzazione locale delle superficie con un fascio di sezioni piane oscnodali. — Una curva nel piano (x, y) che abbia in O $(0, 0)$ un oscnodo con tangente l'asse y ha una equazione del tipo

$$y^2 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + \dots + a_{50}x^5 \dots = 0 \tag{2.1}$$

con le condizioni

$$4a_{40} = a_{21}{}^2 \tag{2.2}$$

$$4a_{12}a_{40}{}^2 - 2a_{31}a_{40}a_{21} + a_{50}a_{21}{}^2 = 0. \tag{2.3}$$

Nello spazio, in coordinate proiettive non omogenee x, y, z, la superficie F passi per $O\,(0, 0, 0)$ con punto doppio uniplanare ([3]), piano tangente $z=0$, e le sezioni piane per l'asse x abbiano in O un oscnodo.

Adottate per la F le stesse notazioni del CONFORTO,

$$(2.4)\qquad z^2+\sum_0^3\beta_i x^{3-i}+\sum_0^4\gamma_i x^{4-i}+\sum_0^5\delta_i x^{5-i}+\ldots=0$$

e

$$(2.5)\qquad \beta_i(y, z)=\sum_0^i{}_j\beta_{ij}z^jy^{i-j},\quad \gamma_i(y, z)=\sum_0^i{}_j\gamma_{ij}z^jy^{i-j},\quad \delta_i(y, z)=\sum_0^i\delta_{ij}z^jy^{i-j}, \ldots$$

la sezione prodotta dal piano $y=\mu z$ su F può ulteriormente individuarsi con l'equazione

$$(2.6)\qquad z^2+\beta_0x^3+\beta_1(\mu, 1)zx^2+\beta_2(\mu, 1)z^2x+\beta_3(\mu, 1)z^3+$$
$$+\gamma_0x^4+\gamma_1(\mu, 1)zx^3+\gamma_2(\mu, 1)z^2x^2+\gamma_3(\mu, 1)z^3x+\gamma_4(\mu, 1)z^4+\delta_0x^5+\ldots=0.$$

Si confronti questa con la (2.1) (leggendovi z al posto di y); per l'oscnodo richiesto dev'essere

$$\beta_0=0,\qquad 4\gamma_0=(\beta_{10}\mu+\beta_{11})^2$$
$$4(\beta_{20}\mu^2+\beta_{21}\mu+\beta_{22})\gamma_0^2-2(\gamma_{10}\mu+\gamma_{11})\gamma_0\beta_{11}+\delta_0\beta_{11}^2=0.$$

Poichè vogliamo che queste condizioni siano identicamente soddisfatte in μ deve aversi

$$(2.7)\qquad \beta_0=\beta_{10}=0,\quad 4\gamma_0=\beta_{11}^2,\quad \beta_{20}\gamma_0^2=0.$$
$$(2\beta_{21}\gamma_0-\gamma_{10}\beta_{11})\gamma_0=0,\quad 4\beta_{22}\gamma_0^2-2\gamma_{11}\beta_{11}\gamma_0+\delta_0\beta_{11}^2=0.$$

La quarta condizione importa $\gamma_0=0$ o $\beta_{20}=0$ (o tutte e due insieme); quindi bisogna distinguere due casi.

1° caso: $\gamma_0=0$. Le (2.7) danno

$$(2.8)\qquad \beta_0=\beta_{10}=\gamma_0=\beta_{11}=0\,;$$

l'equazione della superficie è del tipo

$$(2.9)\qquad z^2+\beta_2(y, z)x+\beta_3(y, z)+\gamma_1(y, z)x^3+\gamma_2(y, z)x^2+\gamma_3(y, z)x+$$
$$+\gamma_4(y, z)+\delta_0x^5+\ldots=0.$$

È necessaria una nuova distinzione, secondo l'ordine n delle superficie F.

Se $n=4$ l'asse x appartiene alla superficie; le sezioni piane considerate si spezzano nell'asse x e in una C_3 che, per un valore generico di μ ha un flesso (ordinario) in O con tangente $y=z=0$. Da questo fatto nasce il comportamento voluto in O della sezione piana generica.

([3]) Escludo l'esame del caso in cui diventi triplo.

Se invece $n > 4$ si ha per la singolarità della sezione piana una rappresentazione del tipo $x = t^2$, $z = \alpha t^5 + \ldots$ cioè un ramo di 2° ordine e 3ª classe (senza escludere una particolarità più elevata, che si presenta se $\delta_0 = 0$: due rami di flesso a contatto del 2° ordine in O; è questo caso che più assomiglia al caso $n = 4$, avendosi $\delta_0 = 0$ per $n = 4$).

2° caso: $\beta_{20} = 0$. Le (2.7) danno

$$\beta_0 = \beta_{10} = 0, \quad 4\gamma_0 = \beta_{11}^2, \quad \beta_{20} = 0 \tag{2.10}$$

$$2\beta_{21}\gamma_0 - \gamma_{10}\beta_{11} = 0, \quad 4\beta_{22}\gamma_0^2 - 2\gamma_{11}\beta_{11}\gamma_0 + \delta_0\beta_{11}^2 = 0 \tag{2.11}$$

le due ultime si possono anche scrivere (per $\beta_{11} \neq 0$)

$$\beta_{21}\beta_{11} = 2\gamma_{10}, \quad \beta_{22}\beta_{11}^2 - 2\gamma_{11}\beta_{11} + 4\delta_0 = 0. \tag{2.12}$$

Distinguendo il caso $n = 4$ dall'altro $n > 4$ si hanno rispettivamente le condizioni

$$n=4: \quad \beta_0=\beta_{10}=\beta_{20}=0, \quad 4\gamma_0=\beta_{11}^2, \quad \beta_{21}\beta_{11}=2\gamma_{10}, \quad \beta_{22}\beta_{11}=2\gamma_{11} \tag{2.13}$$

$$n>4: \quad \beta_0=\beta_{10}=\beta_{20}=0, \quad 4\gamma_0=\beta_{11}^2, \quad \beta_{21}\beta_{11}=2\gamma_{10}, \quad \beta_{22}\beta_{11}^2+4\delta_0=2\gamma_{11}\beta_{11} \tag{2.14}$$

(e queste si riducono alle precedenti se $\delta_0 = 0$).

Se si fa il diagramma di NEWTON relativo alla singolarità delle sezioni piane (2.6) si riscontrano subito due rami lineari. $z = bx^2 + \ldots$, che hanno fra loro un contatto del 2° ordine perchè l'equazione determinante b è $b^2 + \beta_{11}b + \gamma_0 = 0$, che ha la radice doppia $b = -\beta_{11}/2$.

Di qui nasce l'oscnodo. Il fatto (da non assumere a priori) che b risulta indipendente da μ può enunciarsi dicendo che tutti quegli elementi del 2° ordine ($y = \mu z$, $z = bx^2$) appartengono a qualsiasi cono avente il vertice sull'asse x e contenente uno di essi.

Per $n = 4$ queste sono le $F_4^{(2)}$ di NOETHER, di cui già il CONFORTO ha scritto l'equazione [4].

Limitandoci ad enunciare quella parte dei fatti trovati relativa alle F_4 si ha:

Se fra le ∞^{25} F$_4$ *aventi un punto* O *biplanare assegnato con piano tangente assegnato si considerano quelle le cui sezioni piane*

[4] F. CONFORTO, Nota I, eq. (6′).

Anche le superficie del 1° caso possono ottenersi imitando l'analisi del CONFORTO, quando si ponga, per un elemento curvilineo che debba appartenere alla superficie, e tangente all'asse x in 0, $y = \mu z$ e $z = \mu b x^2 + cx^3$.

Scritte allora le sue equazioni (3) per $b_2 = \mu b$ e tenuto conto dell'arbitrarietà di c, da esse si ricavano non già le (4) ma le seguenti: $b = 0$, $\beta_0 = \beta_{10} = \gamma_0 = \beta_{11} = \delta_0 = 0$; queste sono appunto le (2.8) che caratterizzano il 1° caso.

per una tangente pure assegnata hanno nel punto un oscnodo si ottengono due famiglie distinte:

1) *una famiglia di* ∞^{21} F_4 *che passano per la tangente assegnata; quelle sezioni si compongono di questa e di una* C_3 *avente* O *per flesso con quella tangente di flesso;*

2) *una famiglia di* ∞^{19} F_4 *che sono le* $F_4^{(2)}$ *di* NOETHER.

3. **Ulteriore specializzazione della singolarità.** — Domandiamoci ora se esistano superficie dotate oltre che della proprietà precedente (oscnodi di quelle sezioni piane) dell'altra che il piano tangente in O le seghi in una curva con punto triplo a tangenti coincidenti.

La condizione ora espressa importa che sia $\beta_{20} = 0$; questa condizione è già soddisfatta nel 2° caso, quindi tutte le superficie di questa famiglia, cioè le $F_4^{(2)}$ nel caso $n = 4$, sono tutte del tipo che si vuol caratterizzare.

Invece nel primo caso si ha una sottofamiglia di quella già esaminata di equazione ($\beta_0 = \beta_{10} = \beta_{11} = \beta_{20} = \gamma_0 = 0$):

$$z^2 + (\beta_{21}y + \beta_{22}z)zx + \beta_3(y, z) + \gamma_1(y, z)x^3 + \ldots + \delta_0 x^5 + \ldots = 0. \tag{3.1}$$

Risulta chiaramente di qua che per $n = 4$ queste non sono caso particolare delle $F_4^{(2)}$ bensì dell'altra famiglia di F_4 con un fascio di sezioni piane oscnodali.

Le superficie ora trovate, assegnati O, *il piano ivi tangente e la tangente singolare, sono* ∞^{20} *mentre le* $F_4^{(2)}$ *sono* ∞^{19}*; la differenza fra i due casi sta in ciò che l'elemento del 2° ordine* E_2 *sostegno dell'oscnodo di una di quelle sezioni è di flesso (rettilineo) per le* F_4 *ora trovate e non è di flesso (curvilineo) per le* $F_4^{(2)}$.

4. **Le superficie comuni alle famiglie $F_4^{(2)}$ ed $F_4^{(3)}$.** — Esaminiamo le sezioni $y = \mu z$. La (3.1) dà

$$\begin{aligned} z^2 + (\beta_{21}\mu + \beta_{22})z^2x + \beta_3(\mu, 1)z^3 + (\gamma_{10}\mu + \gamma_{11})zx^3 + \gamma_2(\mu, 1)z^2x^2 + \\ + \gamma_3(\mu, 1)z^3x + \gamma_4(\mu, 1)z^4 + \delta_0 x^5 + \ldots = 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Se $\delta_0 \neq 0$ si ha un ramo del tipo

$$z = t^2, z = \alpha_0 t^5 + \alpha_1 t^6 + \ldots$$

e risulta $\alpha_0^2 = -\delta_0$, $\alpha_1 = -(\gamma_{10}\mu + \gamma_{11})/2$; quindi l'$E_6$ risulta indipendente da μ se e solo se $\gamma_{10} = 0$.

Se $\delta_0 = 0$ bisogna distinguere secondo che $n = 4$ o $n > 4$. Nel caso $n > 4$ si hanno in generale due rami del tipo

$$z = \alpha x^3 + \ldots -$$

e per essi

$$\alpha^2 + (\gamma_{10}\mu + \gamma_{11})\alpha + \varepsilon_0 = 0$$

(essendo ε_0 il coefficiente x^6 in F) e questi due rami *non* dipendono da μ solo se $\gamma_{10} = 0$ (ed hanno contatto armonico se, essendo $\varepsilon_0 \neq 0$ risulta $\gamma_{10} = \gamma_{11} = 0$).

Se invece $n = 4$ si stacca dalla sezione $z = 0$ e il ramo di flesso $z = \alpha x^3 + \ldots$ è determiuato da

$$\alpha + (\gamma_{10}\mu + \gamma_{11}) = 0$$

ed è indipendente da μ solo se $\gamma_{10} = 0$ e $\gamma_{11} \neq 0$.

Tenendo presente solo quest' ultimo fatto possiamo dire:

Nella famiglia ∞^{20} *di* F_4 *sopra determinata* (n. 3) *esiste una famiglia* ∞^{19} *di* F_4 *tali che le sezioni piane per la tangente singolare hanno* E_3 *di flesso appartenenti tutti al cono che da un punto qualsiasi della tangente proietta uno di essi.*

Questa famiglia (per cui $\beta_0 = \beta_{10} = \beta_{11} = \gamma_0 = \gamma_{10} = 0$) è quella della $F_4^{(3)}$ di NOETHER, come risulta dalle condizioni trovate per queste dal CONFORTO.

Se poi anche $\gamma_{11} = 0$ (quindi $\alpha = 0$), la sezione piana prodotta da $y = \mu z$ si spezza nella tangente singolare contata due volte e in una conica (non passante in generale per O). Indichiamo queste superficie con $\overline{F}_4^{(3)}$.

Tanto le $F_4^{(3)}$ che le $\overline{F}_4^{(3)}$ possono caratterizzarsi nella famiglia ∞^{20} di F_4 in altro modo.

Infatti il piano tangente ad una di queste ultime, di equazione (3.1), nel punto $(x_0, 0, 0, t_0)$ della tangente singolare è $\gamma_{10}y + \gamma_{11}z = 0$ (per $x_0 \neq 0$); esso coincide con $z = 0$ nel caso della $F_4^{(3)}$ e diviene indeterminato nel caso delle $\overline{F}_4^{(3)}$.

In questo ultimo caso ogni punto della retta singolare è punto doppio biplanare; e precisamente la coppia di piani tangenti è definita da

$$\gamma_{10}x_0^2y^2 + (\beta_{21}t_0 + \gamma_{21}x_0)x_0yz + (t_0^2 + \beta_{22}x_0t_0 + \gamma_{22}x_0^2)z^2 = 0;$$

di qua si ha il significato di $\gamma_{20} = 0$ (della coppia fa sempre parte $z = 0$). In generale (cioè per $\gamma_{20} \neq 0$) si hanno due punti (oltre $x_0 = 0$) uniplanari dati da

$$(\beta_{21}t_0 + \gamma_{21}x_0)^2 - 4\gamma_{20}(t_0^2 + \beta_{22}x_0t_0 + \gamma_{22}x_0^2) = 0$$

(prendendo uno di essi come $t_0 = 0$ e il piano tangente doppio come $y^2 = 0$ si ha $\gamma_{21} = \gamma_{22} = 0$; se l'altro punto uniplanare si prende come punto unità e il piano come piano unità per la tangente singolare si ha inoltre $\beta_{21} = -2\gamma_{20}$, $\beta_{22} = \gamma_{20} - 1$).

L'ultima famiglia, delle $\bar{F}_4^{(3)}$, si ottiene anche dalle $F_4^{(2)}$, cioè dalle (2.13), ponendovi $\beta_{11}=0$ sicchè in questo senso si possono considerare le $\bar{F}_4^{(3)}$ anche come caso particolare delle $F_4^{(2)}$. Però è da notare che le (2.13) (o le (2.12) per $\delta_0=0$) si sono ottenute dalle (2.11) dividendole per $\beta_{11}\neq 0$ e quindi se si parte dalle condizioni (2.10) e (2.11) che traducono in modo immediato le condizioni per l'oscnodo non vi si può porre $\beta_{11}=0$ per ottenere le $F_4^{(2)}$; che se così si fa si ottiene $\beta_0=\beta_{10}=\beta_{11}=\beta_{20}=\gamma_0=0$, cioè la famiglia ∞^{20} di F_4 già trovata al n. 3. Ciò spiega bene, mi pare, perchè le due famiglie $F_4^{(2)}$, $F_4^{(3)}$ senza essere un caso particolare dell'altra, hanno in comune la famiglia $\bar{F}_4^{(3)}$.

5. **Esame delle singolarità della curva di diramazione per i tipi di F_4.** — Occupiamoci ora della curva di diramazione per mostrare come le sue singolarità determinino quelle dei vari tipi di F_4 esaminati.

L'equazione di F_4 (con punto uniplanare) in coordinate omogenee sia

$$z^2t^2+\Phi_3(x,y,z)t+\Phi_4(x,y,z)=0 \tag{5.1}$$

essendo Φ_3, Φ_4 forme di 3° e 4° grado in x, y, z.

Il cono circoscritto da O (0, 0, 0, 1) alla superficie ha l'equazione

$$\Phi_3^2(x,y,z)-4z^2\Phi_4(x,y,z)=0 \tag{5.2}$$

e questa è anche, sul piano doppio $t=0$, l'equazione della C_6 di diramazione.

Questa C_6 tocca $\Phi_4=0$ nei dodici punti d'intersezione con $\Phi_3=0$ ed ha tre punti doppi nelle intersezioni di $\Phi_3=0$ con $z=0$. Singolarità più particolari si hanno per relazioni più particolari fra $\Phi_3=0$, $\Phi_4=0$, $z=0$.

Esaminiamo appunto le singolarità della C_6 relative alle varie F_4 che ci si sono presentate nel punto O' (1, 0, 0, 0) d'intersezione della tangente singolare con $t=0$.

a) Per le $\infty^{11} F_4$ soddisfacenti alla (2.8), e fatto $x=1$ si ha per C_6

$$[\beta_2(y,z)+\beta_3(y,z)]^2-4z^2[\gamma_2(y,z)+\gamma_2(y,z)+\gamma_3(y,z)+\gamma_4(y,z)]=0. \tag{5.3}$$

Se si fa il diagramma di Newton [5] relativo alla singolarità in esame (segnando per il termine $a_{pq}y^pz^q$ il punto di coordinate p, q) si vede che la spezzata separatrice ha i vertici (0,3) (1,2) (4,0) quindi si ha in O' un ramo cuspidale con tangente $z=0$ e un

[5] Il lettore è pregato di farsi le facili figure.

ramo lineare con tangente diversa da $z=0$, $\gamma_{10}y+\gamma_{11}z=0$ (se invece fosse $\gamma_{10}=0$ si avrebbe un solo ramo del tipo $y=t^3$, $z=\alpha t^4+...$).

b) Per le ∞^{20} F_4 (3.1) per le quali $\beta_0=\beta_{10}=\beta_{11}=\beta_{20}=\gamma_0=0$, nel diagramma relativo alla singolarità in O' sono vertici della separatrice (0,3), (1,2) e (6,0) quindi si ha un ramo del tipo $y=t^2$, $z=\alpha t^5$, ... e un ramo lineare con tangente $\gamma_{10}y+\gamma_{11}z=0$.

c) Per le $\infty^{19}F_4^{(3)}$ per le quali alle precedenti bisogna aggiungere $\gamma_{10}=0$ (ma $\gamma_{11}\neq 0$) manca nel diagramma il punto (1,2) quindi la separatrice si rettifica nella congiungente i punti (0,3), (2,2), (4,1), (6,0): nascono quindi per C_6 tre rami lineari tangenti in O' (in altri termini: due punti tripli infinitamente vicini).

d) Per le $\infty^{18}\overline{F}_4^{(3)}$ che si ottengono dalle precedenti aggiungendo la condizione $\gamma_{11}=0$ viene a mancare il vertice (0,3) e quindi in luogo del primo tratto (in alto a sinistra) di separatrice si introduce il tratto rettilineo per i punti (0,4), (1,3), (2,1); poi la separatrice continua come nel caso precedente. Si ha un punto quadruplo per cui passano due rami lineari tangenti a $z=0$ e due rami lineari con tangenti diverse da $z=0$ e in generale anche fra loro.

e) Per le $\infty^{19}F_4^{(2)}$ caratterizzate dalle (2.13) ($\beta_0=\beta_{10}=\beta_{20}=0$, $4\gamma_0=\beta_{11}^2$, $\beta_{21}\beta_{11}=2\gamma_{10}$, $\beta_{22}\beta_{11}=2\gamma_{11}$, $\beta_{11}\neq 0$) si ha per la C_6

$$[\beta_{11}z+(\beta_{21}y+\beta_{22}z)z+\beta_3(y,z)]^2-4z^2[\gamma_0+\gamma_1(y,z)+\gamma_2(yz)+...]=0$$

e sviluppando e tenendo conto delle condizioni ricordate

$$z\{2\beta_{11}\beta_3(y,z)+z[(\beta_{21}y+\beta_{22}z)^2-4\gamma_2(y,z)]\}+...=0$$

ove i ... indicano termini in y e z di 5° e di 6° grado contenenti coefficienti β, γ non vincolati affatto dalle condizioni caratterizzanti la $F_4^{(2)}$; manca il termine in y^5. Sicchè in questo caso la C_6 ha un punto quadruplo in O' per cui passano quattro rami lineari di cui uno con tangente $z=0$ è di flesso.

I punti della separatrice sono (0,4), (1,3), (2,2), (3,1) e (6,0); i primi quattro stanno su di un tratto rettilineo (che dà luogo ai tre rami con tangente diversa da $z=0$) e così gli ultimi due che determinano il ramo di flesso.

Il coefficiente del termine in y^3z è $2\beta_{11}\beta_{30}$; ma è $\beta_{30}\neq 0$ se la C_6 non è spezzata (l'unico termine nella sola y essendo $\beta_{30}^2y^6$); quel termine non può mancare che se $\beta_{11}=0$; in questo caso si ha una $\overline{F}_4^{(3)}$ (caso *d*). Mancando il punto (3,1) nel diagramma la separatrice si compone del tratto rettilineo per i punti (0,4), (1,3), (2,2) e dell'altro per i punti (2,2), (4,1), (6,0) come s'era già trovato giungendovi, con diversa deformazione del diagramma relativo a C_6, dalle $F_4^{(3)}$.

6. Caratterizzazione dei tipi F_4 a partire dalle singolarità della curva di diramazione. — Invertiamo ora quanto precede mostrando che le singolarità di C_6 in O' caratterizzano quelle delle F_4 in O.

Ci riferiamo sempre alle (5.1) e (5.2) con

$$\Phi_3(1, y, z) = \beta_0 + \beta_1(y, z) + \beta_2(y, z) + \beta_3(y, z)$$
$$\Phi_4(1, y, z) = \gamma_0 + \gamma_1(y, z) + \gamma_2(y, z) + \gamma_3(y, z) + \gamma_4(y, z).$$

Affinchè la C_6, $\Phi_3^2 = 4z^2\Phi_4$, passi per O' e abbia ivi almeno un punto triplo dev'essere

$$\beta_0 = \beta_{20} = 0, \quad \beta_{11}^2 = 4\gamma_0.$$

Se s'impone che per esso passi un ramo cuspidale ordinario ($y = t^2$, $z = \alpha t^3 + ...$) con tangente $z = 0$ e un ramo lineare si ha $\beta_{11} = 0$, $\beta_{20} \neq 0$, $\gamma_{10} \neq 0$ e queste condizioni caratterizzano le $\infty^{21} F_4$ del caso *a*).

Se invece la C_6 in O' deve avere un ramo cuspidale di 2ª specie con tangente $z = 0$, ($y = t^2$, $z = \alpha t^5 + ...$) e un ramo lineare (con tangente diversa da $z = 0$) si ha $\beta_0 = \beta_{10} = \beta_{11} = \beta_{20} = \gamma_0 = 0$ (e $\gamma_{10} \neq 0$) e con ciò si sono caratterizzate le $\infty^{20} F_4$ del caso *b*).

Il punto triplo in O' a tangenti coincidenti $z = 0$ dà le condizioni $\beta_0 = \beta_{10} = \beta_{11} = \gamma_0 = \gamma_{10} = 0$; e se deve derivare da tre rami lineari tangenti (quindi se nell'equazione di C_6 debbono mancare i termini in y^3z, y^4, y^5) dev'essere anche $\beta_{20} = 0$, cioè questa singolarità caratterizza le $\infty^{19} F_4^{(3)}$ del caso *c*) [6].

Per avere un punto quadruplo in O' bisogna, oltre a $\beta_0 = \beta_{10} = 0$, $\beta_{11}^2 = 4\gamma_0$ avere $\beta_{11}\beta_{20} = 0$, $\beta_{11}\beta_{21} = 2\gamma_{10}$, $\beta_{11}\beta_{22} = 2\gamma_{11}$ e affinchè una delle tangenti sia $z = 0$ dev'essere $\beta_{20} = 0$. Dopo ciò se $z = 0$ dev'essere tangente doppia, senza che C_6 si spezzi, dev'essere $\beta_{11} = 0$, $\beta_{30} \neq 0$; cioè, riassumendo le condizioni trovate,

$$\beta_0 = \beta_{10} = \beta_{11} = \beta_{20} = \gamma_0 = \gamma_{10} = \gamma_{11} = 0;$$

e queste caratterizzano il caso *d*) delle $\overline{F}_4^{(3)}$.

Se invece $z = 0$ è tangente semplice (in O' quadruplo) è $\beta_{11} \neq 0$ e quella tangente è necessariamente di flesso. Ciò caratterizza le $F_4^{(2)}$ del caso *e*).

[6] Si può ottenere un punto triplo con tangenti coincidenti in $z = 0$ anche quando sia $\beta_{11} \neq 0$ con le condizioni $\beta_0 = \beta_{10} = \beta_{20} = 0$, $\beta_{11}^2 = 4\gamma_0$, $\beta_{11}\beta_{21} = 2\gamma_{10}$ (e $\beta_{11}\beta_{22} \neq 2\gamma_{11}$ se la molteplicità di O' non supera 3); la condizione relativa ai 3 rami lineari tangenti porta poi $\beta_{30} = 0$ e allora C_6 si spezza in $z^2 = 0$ e in una quartica; basta quindi escludere lo spezzamento per caratterizzare, con la singolarità detta in O', le $F_4^{(3)}$. Basta anzi escludere che uno dei rami sia di flesso.

Anche da questo punto di vista (delle curve di diramazione) le $\bar{F}_4^{(3)}$ appariscono come caso particolare sia delle $F_4^{(3)}$ (quando il punto O' da triplo diviene quadruplo conservando due tangenti coincidenti in $z=0$) sia delle $F_4^{(2)}$ (quando la tangente $z=0$ da semplice diviene doppia).