
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

UMI

Notizie

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2,
Vol. 1 (1939), n.3, p. 290–305.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_3_290_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

NOTIZIE

COMITATO PER LA FISICA E LA MATEMATICA DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

2° Convegno di Matematica applicata.

Ha avuto luogo in Roma, per iniziativa del Comitato per la fisica e la matematica del C. N. R., presso l'Istituto matematico della R. Università nei giorni 23, 24 e 25 febbraio, il 2° Convegno di Matematica applicata. Le relazioni sono state seguite con vivo interesse da professori universitari di varie sedi, e da tecnici.

I tre temi del convegno erano i seguenti:

1) *L'idea di probabilità nella fisica classica e in quella quantistica* (Prof. E. PERSICO, G. C. WICK).

2) *Omogeneità, similitudine, modelli: fondamenti teorici e sperimentali* (Prof. E. PISTOLESI, A. EULA).

3) *Metodi di calcolo in alcuni problemi tecnici* (Prof. A. GHIZZETTI, W. GRÖBNER).

Diamo un sunto delle varie relazioni; esse verranno pubblicate in un volume in preparazione a cura del Comitato.

I Tema. - 1. *L'idea di probabilità nella fisica classica* (E. PERSICO) — Scopo della conferenza è raccogliere alcuni dei più importanti casi in cui la parola probabilità è usata nella fisica classica, e mostrarne il significato attraverso l'uso che se ne fa.

Uno dei casi più importanti è la teoria della disintegrazione delle sostanze radioattive: in questo caso il concetto di probabilità è definito in modo assai semplice e non dà luogo a difficoltà concettuali. Assai più complessa invece è la discussione del concetto di probabilità nella teoria cinetica dei gas; in questo campo la parola probabilità è usata con significati diversi non sempre equivalenti, o, per lo meno, di cui spesso è difficile dimostrare l'equivalenza. Così la probabilità che in un certo istante un gas abbia una certa proprietà P (dipendente dallo stato cinetico delle sue molecole) si può definire in due modi: a) lasciando evolvere spontaneamente il gas per un tempo T ; se T' è il tempo totale durante il quale esso ha la proprietà P , si chiama «probabilità della proprietà P » il limite (per T tendente a ∞) del rapporto T'/T ; b) si consideri un gran numero N di modelli del dato gas, di identica struttura meccanica, ma aventi ini-

zionalmente stati cinetici diversi distribuiti con una certa legge (opportuna-mente definita): di essi siano N' quelli che hanno la proprietà P in un certo istante (e si può dimostrare che N' non varia col tempo): si chiama « probabilità della proprietà P » il limite del rapporto N'/N per N tendente a ∞ . La dimostrazione della equivalenza di queste due definizioni si riconduce al cosiddetto « teorema ergodico », e dà luogo a questioni assai delicate e non ancora del tutto risolte.

2. - *L'idea di probabilità nella fisica dei quanti* (G. C. WICK). — Sebbene esistano attualmente numerose esposizioni della teoria dei quanti, e alcune di queste veramente ottime, hanno ancora vasta diffusione vari malintesi riguardo agli stessi principi fondamentali di questa teoria, e in particolare riguardo a quella questione della causalità, che rappresenta naturalmente per il probabilista il punto più interessante della fisica quantica.

Non è possibile intendere la natura di tale questione senza ripensare nel loro insieme i problemi concettuali collegati dalle contraddizioni profonde che esistono tra il comportamento osservato dei sistemi atomici e le basi stesse della fisica classica. Soprattutto è necessario intendere come nella fisica dei quanti non si tratti di una semplice negazione del principio di causalità, che sarebbe in contraddizione coll'ideale stesso della ricerca scientifica, ma di una nuova posizione epistemologica, di fronte alla quale il problema della causalità come viene comunemente posto perde il suo significato.

Mediante alcuni esempi viene illustrata la situazione assolutamente nuova che si presenta nella fisica dei quanti quando si raffrontano i risultati di quelle esperienze (come quella di Bothe e Geiger) che rivelano la validità dettagliata dei principi di conservazione dei singoli atti elementari con le ben note esperienze di interferenza.

In base a un esempio che presenta il dilemma quantico in una forma particolarmente netta e istruttiva viene introdotta l'idea di « complementarità » e si accenna al modo in cui questa idea permette di risolvere le difficoltà concettuali ricordate.

Il Tema. - 1. *Omogeneità, similitudine, modelli: fondamenti teorici* (E. PISTOLESI). — Il prof. PISTOLESI incomincia ricordando i concetti di grandezza e di misura che sono la base dell'omogeneità e della similitudine; e quelli di grandezza fondamentale e di grandezza derivata. I sistemi dimensionali possono essere semplicemente geometrici, oppure anche il tempo e la massa. Generalmente si assumono come grandezze fondamentali la lunghezza, il tempo e la massa; ma si possono anche assumere come fondamentali grandezze derivate da queste, purchè indipendenti; nel sistema pratico, per esempio, una delle tre grandezze fondamentali è la forza.

Le dimensioni delle grandezze derivate dipendono dal modo in cui si sono definite; per esempio, se la forza fosse definita in base alla legge della gravitazione universale, nell'equazione generale della dinamica com-

parirebbe un coefficiente di proporzionalità. D'altra parte il numero delle unità fondamentali è arbitrario; l'angolo, per esempio, si considera senza dimensioni, perchè si definisce comunemente come un rapporto di due lunghezze, ma in realtà esso è una grandezza cui si potrebbe attribuire una dimensione propria, che comparirebbe anche nell'espressione della velocità angolare, dell'accelerazione angolare, ecc.

Al di fuori della meccanica occorrono altre grandezze fondamentali, per esempio la temperatura, la costante elettrica o magnetica, in luogo delle quali ultime si potrebbe introdurre la massa elettrica dell'elettrone oppure un'unità di resistenza o di intensità di corrente.

Il principio di omogeneità è espresso dal teorema di Buckingham; se in un dato fenomeno esiste una relazione fisica fra diverse grandezze, questa si traduce in una equazione fra le misure di tali grandezze, della forma $x = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$. Se la f si compone di più termini, per il principio di omogeneità questi devono avere tutte le stesse dimensioni. Ora si dimostra che la forma più generale di qualsiasi equazione fisica fra n grandezze è la seguente:

$$F(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n) = 0$$

nella quale π sono prodotti adimensionali delle x . Se le π_i non sono tutte indipendenti tra di loro, si può ridurre il loro numero ad un minimo, che è dato dalla differenza tra il numero delle grandezze ed il numero delle unità fondamentali; è questo il *teorema di Vaschy-Buckingham* o *teorema π* . Se alcune delle π sono della stessa natura, nella F compaiono anche i loro rapporti adimensionali λ , che si chiamano *fattori di forma*.

È importante osservare che tutto ciò che precede vale anche quando la legge del fenomeno è espressa in forma differenziale o integrale, perchè è sempre possibile trasformare l'equazione in modo che vi compaiono rapporti adimensionali, considerando rapporti o valori delle variabili o delle loro derivate ai limiti.

Nelle applicazioni il principio di omogeneità può servire a controllare l'esattezza delle equazioni che definiscono un fenomeno fisico; e addirittura a stabilire la forma della legge, se il fenomeno dipende da un solo prodotto adimensionale π ; si può, per esempio, ricavare la legge del pendolo, quella della resistenza aerodinamica della sfera ecc.

Due sistemi sono simili quando esiste una corrispondenza biunivoca fra i loro punti e le grandezze fisiche nei punti corrispondenti hanno un rapporto costante. Se i fenomeni dipendono dalla forma dei corpi, la similitudine fisica porta di conseguenza quella geometrica. Condizione sufficiente perchè esista la similitudine è l'uguaglianza dei rapporti π fra le grandezze iniziali o determinanti; allora tutti i rapporti π nei punti corrispondenti sono uguali. Questa condizione è anche necessaria. Se le equazioni che reggono il fenomeno sono in forma differenziale, occorre anche la similitudine per le condizioni al contorno.

Quando varie grandezze sono legate fra di loro da una equazione fisica, si può porre tale equazione sotto la forma $F(\pi_1, \pi_2 \dots \lambda_1, \lambda_2 \dots) = 0$, che lega le grandezze date da $x_1, x_2 \dots$ alle funzioni $\lambda_1, \lambda_2 \dots$. Si pos-

sono ricavare tante relazioni quante sono le incognite e si può sempre fare in modo che l'incognita compaia in uno solo dei rapporti π e alla prima potenza si può porre cioè

$$y = x_1^{z_1} x_2^{z_2} \dots x_n^{z_n} \varphi(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n).$$

Se i due sistemi sono simili le π e le λ sono uguali; perciò anche la funzione φ è la stessa, e l'equazione fornisce la *legge di similitudine* del fenomeno.

Occorre scegliere la π in cui compare l'incognita in modo che l'incognita stessa ne dipenda principalmente. Inoltre bisogna osservare che si può sempre pensare un sistema simile ad un sistema dato, ma non è sempre possibile realizzarlo fisicamente, perchè l'uguaglianza delle π impone fra gli elementi del secondo sistema relazioni che non possono essere sempre verificate fra i corpi della natura. Per esempio, nel campo della idro-aerodinamica i fattori da cui dipende il fenomeno nel caso più generale sono i seguenti: lunghezza l , velocità v , densità ρ , pressione p , temperatura del corpo T , temperatura del fluido T_0 , viscosità μ , conducibilità interna λ , accelerazione della gravità g , calori specifici c_p e c_v , viscosità cinematica ν , tensione superficiale γ . Si possono allora formare diversi rapporti adimensionali con la resistenza; quello più adoperato è $\frac{R}{\rho l^2 v^2}$;

ma se ne hanno molti altri: $\frac{R}{\rho l^3 a}$ che interessa nel caso dei moti accelerati; $\frac{R}{\mu l}$ nel caso in cui le forze viscosose sono preponderanti. Se non c'è scambio di calore, si può prescindere dalle temperature e porre per coefficiente di resistenza dei gas

$$c_r = \frac{R}{\rho l^2 v^2} = f\left(\frac{\rho v l}{\mu}, \frac{v^2 \rho}{p}, \frac{t v}{l}, \frac{v^2}{l g}, \frac{c_p}{c_v}, \dots, \lambda_1, \lambda_2 \dots\right)$$

e per quello dei liquidi

$$c_r = \frac{R}{\rho l^2 v^2} = f\left(\frac{\rho v l}{\mu}, \frac{v^2 \rho}{p}, \frac{t v}{l}, \frac{v^2}{l g}, \frac{\gamma}{\rho v l^2}, \dots, \lambda_1, \lambda_2 \dots\right)$$

Il primo dei rapporti è il *numero di Reynolds*, il terzo, che riguarda i moti non permanenti, è il *numero di Thomson*, il quarto che interessa quando è in gioco il peso del fluido è il *numero di Froude*; il rapporto $\frac{c_p}{c_v}$ si riduce facilmente al *numero di Mach* $\frac{v}{c}$ essendo c la velocità del suono. Il rapporto che tiene conto della tensione superficiale è il *numero di Weber*. Infine quando avvengono scambi termici si deve considerare il *numero di Péclet* $\frac{\rho v l c_p}{\lambda}$ o il *numero di Prandtl* $\frac{c_p \mu}{\lambda}$ che è il rapporto fra il numero di Reynolds e quello di Péclet, Prandtl ha dimostrato che, per i gas questo numero è l'unità e perciò è inutile prenderlo in considerazione.

La similitudine piena non può essere realizzata. Se si considera per esempio un moto permanente, si dovrebbe avere:

$$\frac{vl}{v} = \frac{v'l'}{v}, \quad \frac{v^2\rho}{p} = \frac{v'^2\rho'}{p'}, \quad \frac{v^2}{lg} = \frac{v'^2}{l'g'}$$

siccome necessariamente $g = g'$, dovrebbe essere:

$$\frac{v'}{v} = \sqrt{\frac{l'}{l}}, \quad \frac{v'}{v} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{3/2}, \quad \frac{p'/\rho'}{p/\rho} = \frac{l'}{l}$$

cioè le caratteristiche fisiche del fluido dovrebbero cambiare per ogni rapporto di similitudine.

Le leggi di similitudine sono dunque valide per approssimazione: occorre valutare caso per caso quali sono i rapporti π che hanno importanza preponderante nel determinare un certo fenomeno, trascurando gli altri; si può cioè avere una similitudine parziale. Così, se la gravità è preponderante, occorre considerare il numero di Froude, se invece predomina la viscosità, il numero di Reynolds, alle alte velocità il numero di Mach ecc.

È da osservare che la similitudine geometrica deve essere estesa anche alla scabrezza delle superficie lambite dal fluido; e che quando le esperienze si fanno in corrente artificiale, le misure vengono influenzate anche dalla turbolenza, che è definita dalla intensità, cioè dal rapporto fra lo scarto quadratico medio e il valore della velocità, e dalla scala della turbolenza, che ancora non è stata definita in modo preciso almeno in generale.

Il prof. PISTOLESI passò quindi ad esporre numerosi esempi nei problemi di trasmissione del calore da una parete ad un fluido: la quantità di calore Q corrisponde alla resistenza R e T corrispondente a p : i due parametri fondamentali sono il numero di Reynolds e quello di Mach, avendo ammesso il numero di Prandtl uguale all'unità. Nel movimento di un liquido in un condotto il parametro principale è il numero di Reynolds, oltre i fattori di forma, uno dei quali definirà la scabrezza della parete; se il condotto è a pelo libero interviene anche il numero di Froude.

Per le eliche aeree e marine, i coefficienti di spinta e coppia e il rendimento sono del tipo:

$$f\left(\frac{v}{r\Omega}, \frac{rv}{v}, \frac{v}{c}, \frac{\Delta}{\rho}, \frac{E}{\Delta v^2} \dots\right)$$

nella quale r è il raggio dell'elica, Ω è la sua velocità angolare, Δ ed E sono rispettivamente la densità e il modulo di elasticità del materiale. Anche per le macchine idrauliche, per le turbine, per i problemi di elasticità si possono stabilire leggi di similitudine appropriate.

Un caso interessante è quello dell'aereo in volo, sul cui comportamento durante le evoluzioni e le acrobazie influiscono anche i valori dei momenti d'inerzia intorno ai tre assi principali.

Nelle applicazioni pratiche occorre accontentarsi di una similitudine parziale: vi sono alcuni metodi che, sebbene imperfetti, attuano questo principio, per esempio nell'architettura navale. Il Pistolesi terminò la sua

dotta relazione accennando alla legge di similitudine generalizzata, cioè al fatto che quando due fenomeni diversi sono regolati da leggi che hanno la stessa espressione matematica, l'andamento di uno di essi può essere ricavato dall'andamento dell'altro; per esempio l'andamento del campo aerodinamico circondante un corpo si può in certi casi ottenere dallo studio del campo elettrico intorno al corpo stesso.

2. - *Omogeneità, similitudine, modelli: fondamenti sperimentali.* (A. EULA). — Le esperienze aerodinamiche si fanno nelle gallerie, delle quali il relatore mostrò i tipi principali, enumerando le cause di divario che possono esservi fra le condizioni delle esperienze e quelle del moto dell'aereo al vero. Il parametro più importante da tenere in considerazione è il numero di Reynolds: per ottenere l'identità del numero di Reynolds al modello e al vero, o almeno un numero di Reynolds molto elevato, sono state costruite gallerie di dimensioni molto grandi o gallerie a densità variabile, nelle quali aumentando la pressione dell'aria si può diminuire la viscosità cinematica ed accrescere in corrispondenza il numero di Reynolds.

Tuttavia anche sperimentando a parità di numero di Reynolds non si ottengono nelle diverse gallerie risultati uguali sugli stessi modelli; tipico è il caso della sfera, le cui curve di resistenza, specie ai bassi numeri di Reynolds, presentano divari grandissimi da galleria a galleria. Ciò è dovuto alla turbolenza della corrente, che è diversa nei vari impianti. La turbolenza è una fluttuazione irregolare della velocità in valore e direzione caratterizzata anche, come già accennato dal prof. Pistolesi, da una certa *scala* o *grana*. L'entità della turbolenza è rilevata dalla curva della resistenza della sfera che ha il suo punto critico ad un valore del numero di Reynolds tanto più basso quanto maggiore è la turbolenza. Si può anche misurare con speciali anemometri a filo caldo lo scarto medio della velocità nei vari punti della corrente.

La turbolenza influisce sui risultati delle misure, perchè altera la struttura dello *strato limite*, anticipando la trasformazione del movimento da *laminare* a *turbolento*. L'attrito che si manifesta appunto nello strato limite, assume valori diversi e segue leggi di similitudine diverse a secondo del tipo del movimento. Esiste per ogni corpo un certo valore critico del numero di Reynolds, cioè una data velocità, per il quale avviene la trasformazione del moto: ma per lo stesso numero di Reynolds il punto si sposta al variare della corrente esterna.

Inoltre l'attrito è la causa del distacco della corrente dalla superficie dei corpi nella zona poppiera di essi e il distacco provoca la formazione della *scia* che a sua volta è causa della *resistenza di forma* o *di pressione*. La posizione dei punti di distacco dipende dal numero di Reynolds, ma a pari numero di Reynolds, varia colla turbolenza; e precisamente i punti di distacco si arretrano al crescere della turbolenza, colla conseguenza che la *scia* si restringe e la resistenza di pressione si abbassa per i corpi per i quali tale resistenza è preponderante, nonostante che la resistenza di attrito sia superiore quando il moto è turbolento.

Per avere gli stessi risultati nelle diverse gallerie, oltre a sperimentare allo stesso numero di Reynolds, occorrerebbe sperimentare a parità di turbolenza. È però possibile mettere abbastanza bene d'accordo i diversi risultati, almeno per il caso delle ali, in base al concetto del *numero di Reynolds effettivo*, che si ottiene da quello sperimentale moltiplicandolo per un *fattore di turbolenza*, il quale a sua volta è il rapporto fra il valore critico del numero di Reynolds della sfera in corrente non turbolenta e quello proprio della galleria. In altri termini i risultati ottenuti ad un certo numero di Reynolds in una galleria turbolenta sono quelli che si avrebbero in corrente non turbolenta ad un numero di Reynolds maggiore. Il procedimento è approssimato e mentre appare esatto per la portanza massima delle ali, richiede una correzione supplementare per la resistenza.

A questo punto il prof. EULA mostrò una serie di interessanti risultati ottenuti su profili alari alla galleria americana a densità variabile, dai quali risulta che, in base al numero di Reynolds effettivo, la dipendenza dei coefficienti caratteristici delle ali dal numero di Reynolds resta ben confermata.

Dopo di che il relatore passò a trattare del valore delle esperienze fatte ai piccoli numeri di Reynolds nelle piccole gallerie; nonostante l'imperfezione della similitudine, queste prove non sono inutili, perchè certe grandezze, come i momenti e le pressioni, sono praticamente indipendenti dal numero di Reynolds. Inoltre non è escluso che si possano introdurre nei risultati coefficienti correttivi sia pure approssimati, dedotti dal confronto colle prove in volo. Queste prove però presentano difficoltà d'interpretazione, soprattutto perchè non è noto con esattezza il valore del rendimento dell'elica, che entra nella determinazione del coefficiente di resistenza dell'aeroplano. Più che coi risultati di prove di volo con motore, il confronto deve essere fatto con quelli del volo librato, dal quale è escluso il rendimento dell'elica, se questa funziona a spinta nulla.

Altra causa di divario fra i risultati delle prove fatte anche in grande scala e quelle di volo può essere l'influenza della scabrosità della superficie che varia grandemente al variare del numero di Reynolds e si accentua al crescere di questo.

Il prof. EULA trattò poi delle esperienze a grande numero di Mach che riguardano il volo dell'avvenire fatto ad altissima quota e, fin da adesso, il funzionamento delle eliche, le cui estremità spesso raggiungono e superano anche la velocità del suono.

Tali prove richiedono gallerie speciali, la più grande e potente delle quali è in funzione a Guidonia. In questa galleria si possono raggiungere velocità di circa 2500 Km/h, cioè 2,6 volte la velocità del suono con densità e temperatura stratosferiche. Le prime esperienze eseguite in questa galleria riguardano sezioni di pala d'elica nel campo di velocità subsonora, fin quasi alla velocità del suono. I risultati sono molto importanti perchè in parte riformano quelli acquisiti finora e dimostrano che il peggioramento delle caratteristiche aerodinamiche delle ali nel campo di velocità indagato non è così grave come le precedenti esperienze eseguite all'estero avevano fatto credere.

Esperienze aerodinamiche possono essere fatte anche con modelli volanti: fra queste particolarmente interessanti sono quelle di avvistamento nelle gallerie verticali, eseguite con modelli in scala di peso e di momenti d'inerzia, i quali si avvistano su una corrente ascendente.

Il prof. EULA finì la sua relazione accennando alle gravi difficoltà tecniche ed economiche del problema odierno della galleria aerodinamica, la quale date le velocità già raggiunte e prossimamente raggiungibili degli aeroplani, richiederebbe l'identità contemporanea del numero di Reynolds e del numero di Mach, cioè dimensioni e potenze molto grandi. Si può pensare di adoperare due gallerie diverse, una di grandi dimensioni per indagare l'influenza del numero di Reynolds ed una più piccola ma molto veloce per studiare quella del numero di Mach; oppure si può pensare di adoperare la stessa galleria, ma con densità ridotta quando si vogliono ottenere velocità molto alte. Naturalmente la soluzione in entrambi i casi non è quella ideale, perchè la viscosità e la compressibilità dell'aria devono influenzarsi a vicenda e non è quindi scevra di obiezioni la fusione dei risultati ottenuti separatamente nelle due serie di prove. Per facilitare la soluzione del problema aerodinamico del volo molto veloce gioveranno il progresso della teoria e lo sviluppo delle esperienze in volo dirette al rilievo delle caratteristiche aerodinamiche degli aeroplani.

III Tema. - 1. *Il calcolo degli operatori nello studio dei problemi tecnici* (ALDO GHIZZETTI). — Questa relazione illustra brevemente i metodi e le applicazioni del cosiddetto « *Calcolo simbolico degli elettrotecnici* » (che sarà esposto in una monografia del GHIZZETTI di prossima pubblicazione a cura del Consiglio Nazionale delle Ricerche) allo scopo di mostrare come il suddetto *Calcolo simbolico* (o *degli operatori*) si possa completamente sviluppare come una applicazione della teoria della *trasformazione di Laplace* (1):

$$\mathcal{L}[F(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} F(t) dt = f(p).$$

Le proprietà fondamentali di essa sono espresse dalle:

$$[1] \quad \mathcal{L}[F'(t)] = p f(p) - F(0), \quad \mathcal{L}[F''(t)] = p^2 f(p) - p F(0) - F'(0)$$

$$\mathcal{L}[F(t) * G(t)] = f(p) g(p)$$

ove $F(t) * G(t)$ (prodotto integrale delle due funzioni) denota

$$\int_0^t F(\tau) G(t - \tau) d\tau.$$

Nel caso elementarissimo di un circuito elettrico colle costanti L , R , C , si deve integrare la seguente equazione differenziale di 2° ordine, lineare

$$[2] \quad L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V(t)$$

(1) Vedi G. DOETSCH, *Théorie und Anwendung der Laplace-Transformation*, 1937.

colle condizioni iniziali

$$Q(0) = Q'(0) = 0.$$

Tenuto conto delle [2], la trasformazione di Laplace muta la [2] nella

$$[3] \quad \left(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} \right) \cdot q(p) = v(p)$$

che coincide formalmente colla

$$[4] \quad \left(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} \right) \cdot Q(p) = V(t)$$

dedotta dalla [2] coi soliti metodi operazionali $\left(p = \frac{d}{dt} \right)$, ma ne differisce profondamente nel concetto. La [3] non è una equazione *simbolica* per la $Q(t)$, come la [4], ma una equazione *effettiva* per la sua trasformata di Laplace $q(p)$.

La [4] determina subito la $q(p)$:

$$[5] \quad q(p) = \frac{v(p)}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}}$$

ed è facile assegnare regole precise per risalire dalla $q(p)$ alla $Q(t)$ cercata.

Questo procedimento si estende subito ad equazioni lineari di ordine superiore (a coefficienti costanti) ed a sistemi di tali equazioni; in particolare quindi alle equazioni che regolano il funzionamento delle reti di circuiti elettrici *a costanti concentrate*.

Ad esso si può poi dare un carattere veramente pratico per mezzo di opportune semplici convenzioni che permettono di scrivere *direttamente* le equazioni a cui devono soddisfare le trasformate di Laplace delle grandezze elettriche incognite (cioè, nell'esempio di cui sopra, scrivere subito la [3], senza nemmeno pensare alla [2]).

E questi metodi valgono anche, con lievi modificazioni, per lo studio di problemi più generali di quello dei circuiti che partono dal riposo: p. es. passaggio brusco di una rete di circuiti da un regime di funzionamento (noto) ad un altro (incognito). Anzi essi permettono un'impostazione precisa delle condizioni iniziali che, come è facile mostrare con esempi, non sempre si presentano spontanee.

Nel caso di f. e. m. alternative-sinusoidali ($V(t) = V_0 e^{j\omega t}$, colle notazioni complesse usuali in Elettrotecnica) si deduce poi subito, dall'espressione della L -trasformata (vedi la [5]), l'espressione del *regime* del circuito; basta porre $p = j\omega$, ecc. (si ricade cioè nel cosiddetto *Calcolo simbolico di Steinmetz*). Questo fatto è intimamente connesso alla convergenza dell'integrale di Laplace.

Le cose dette per i circuiti a costanti concentrate si estendono al caso dei circuiti *a costanti uniformemente distribuite* (cavi e linee di trasmissione), presentandosi però maggiori difficoltà per risalire dall'espressione delle L -trasformate delle funzioni incognite alle loro espressioni effettive. I metodi a ciò destinati richiedono cognizioni matematiche abbastanza profonde e possono in pratica essere sostituiti da estese tabelle di trasformate di Laplace, che permettono, assieme ad alcuni teoremi generali,

di dedurre, in quasi tutti i casi che più comunemente si presentano, le antitrasformate che occorrono. A titolo di esempio il relatore cita il caso di un cavo chiuso in cortocircuito, in cui si può esprimere la soluzione del problema sotto forma molto elegante, per mezzo delle *funzioni theta di Jacobi*.

2. - *Condotta forzata scavata in roccia. Tensioni e deformazioni elastodinamiche per azione termica* (W. GRÖBNER). — Il problema è il seguente: l'acqua defluente in una condotta forzata annegata nella roccia ha una temperatura variabile nel tempo; si ricercano: 1) la variazione di temperatura nella roccia circostante la condotta; 2) le deformazioni e tensioni prodotte nella roccia (supposta omogenea) in seguito a tali variazioni.

Supposta la condotta cilindrica di raggio r , indicati con: ρ la distanza di un punto dal suo asse, t il tempo, $v(\rho, t)$ la variazione di temperatura in un punto a distanza $\rho \geq r$ dall'asse e al tempo t , il problema 1) si traduce nella equazione:

$$[1] \quad E[v] \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} - q^2 \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

con le condizioni

$$[2] \quad v(\rho, 0) = 0; \quad \left[\frac{\partial v}{\partial \rho} - \lambda v \right]_{\rho=r} = \alpha(1 - \cos \omega t)$$

(q^2 , λ , α , r sono costanti); e il problema 2) nell'equazione per lo spostamento termoelastico $u(\rho, t)$:

$$[3] \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{u}{\rho^2} - p^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial v}{\partial \rho} = 0$$

con le condizioni

$$u(\rho, 0) = \left[\frac{\partial u(\rho, t)}{\partial t} \right]_{t=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial \rho} + lu \right]_{\rho=r} = v(r, t)$$

(p , l sono costanti).

Le tensioni (radiale, tangenziale, longitudinale) si esprimono poi per mezzo di $u(\rho, t)$.

Il primo problema si risolve ponendo in successive approssimazioni

$$v_N(\rho, t) = \sum_{k=0}^N \varphi_{Nk}(t) f_k(\rho)$$

con

$$f_k(\rho) = e^{\frac{\rho-r}{2}} L_k(\rho-r) \quad \text{e} \quad L_k(x) = \sum_{\alpha=0}^k (-1)^\alpha \binom{k}{\alpha} \frac{x^\alpha}{\alpha!},$$

tenendo conto delle [2] e imponendo che sia minimo l'errore quadratico medio

$$\Omega_N = \int_0^\infty e^{x-t} dt \int_r^\infty (E[v_N])^2 d\rho$$

(metodo variazionale di Picone): la $v_N(\rho, t)$ converge in media verso la

soluzione $v(\rho, t)$ qualunque sia $\alpha > 0$ (conviene scegliere α grande e anzi passare al limite per $\alpha \rightarrow \infty$).

Per il secondo problema, si trascura il termine in $p^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ nella [3] (essendo nel caso trattato $p^2 = 1,15 \cdot 10^{-14}$ e $u(\rho, t)$ limitata all'infinito); e allora

$$u(\rho, t) = \frac{1}{\rho} \int_r^{\rho} \int_r^{\rho} v(\xi, t) d\xi.$$

Anche ove non si trascuri il termine detto si può stabilire (Miranda) un teorema d'esistenza e d'unicità per il secondo problema.

Concorso bandito da Le Assicurazioni d'Italia — È indetto un concorso per titoli e per esami a quattro posti di *Segretario di Direzione* (categoria A) per laureati in *Ingegneria o forniti di titolo equipollente*.

Al presente concorso non sono ammesse le donne. Sono esclusi gli appartenenti alla razza ebraica.

La domanda di ammissione al concorso in carta da bollo da L. 4, corredata da tutti i documenti di rito, deve pervenire (se per posta, in piego raccomandato con ricevuta di ritorno) alla Direzione Generale della Società (Ufficio Personale) in Roma, via S. Basilio n. 14, non oltre le ore 12 del giorno 30 Giugno 1939-XVII.

Il concorso è per titoli e per esami. Gli esami consisteranno:

a) in una prova scritta, comprendente la risoluzione di un problema o di un esercizio di meccanica razionale;

b) in una prova orale sulle seguenti discipline:

1°) meccanica razionale;

2°) scienza delle costruzioni ed elementi di fabbrica;

3°) tecnologia generale;

4°) nozioni giuridiche ed economiche, con particolare riguardo alle assicurazioni contro i danni.

I vincitori del concorso debbono assumere servizio entro quindici giorni dalla data dell'avviso e sono inquadrati nel grado di Segretario di Direzione (categoria A) dopo un periodo di prova di mesi 3.

Ad essi è corrisposto lo stipendio previsto dal contratto collettivo di lavoro per i dipendenti de Le Assicurazioni d'Italia in L. 14.300 annue, al lordo dell'imposta di R. M., oltre a due doppi stipendi a fine giugno e a fine dicembre e all'eventuale gratificazione in sede di approvazione di bilancio. A siffatti emolumenti (devesi, infine, aggiungere, se di diritto, l'indennità di famiglia e, dopo il periodo di prova, il contributo dell'amministrazione per il trattamento di previdenza.

Durante il periodo di prova è corrisposto un emolumento mensile pari a 80 % dello stipendio di tabella.

L'assunzione in servizio è fatta alle condizioni del contratto collettivo di lavoro di cui sopra.

Per informazioni, gli aspiranti debbono rivolgersi alla Direzione Generale della Società, Ufficio Personale, via S. Basilio 14, Roma.

WILHELM BLASCHKE, il giorno 8 Maggio ha tenuto al Seminario Matematico di Milano una conferenza: *Sulla geometria di Hermite*.

Lo stesso giorno e nello stesso Seminario, MAURO PICONE ha tenuto una conferenza sul tema: *Metodi nuovi di indagine per la determinazione degli integrali delle equazioni lineari a derivate parziali*.

Il Presidente dell'U. M. I. ha inviato a ELIA CARTAN, a nome dell'Unione, un telegramma d'augurio, in occasione dei festeggiamenti che si faranno a lui il 18 Maggio.

Assemblea dei Soci dell'U. M. I. — Il giorno 23 Aprile 1939-XVII, alle ore 15, in un'aula dell'Istituto Matematico della R. Università di Bologna, si è adunata in seconda convocazione, essendo andata deserta la prima, l'Assemblea dei soci della U. M. I.

Sono presenti: Angeli Rita, Berzolari, Bompiani, Bortolotti Enea, Bortolotti Ettore, Dore, Maccaferri, Mambriani, Manarini, Piazzolla-Beloch, Sansone, Scorza-Dragoni, Sestini, Sibirani, Villa. Hanno scusata l'assenza: S. E. Severi, ed i proff. Brusotti, Graffi, Serini, Somigliana.

Presiede il presidente della U. M. I. prof. BERZOLARI.

1. *Bilancio*. — Il Presidente dà il benvenuto ai soci presenti, poi invita l'Amministratore, prof. SIBIRANI, a dar lettura della relazione finanziaria.

L'amministratore dà, breve, ma esauriente notizia della gestione finanziaria, annunciando un leggero avanzo, poi dà lettura del bilancio consuntivo.

Il prof. DORE, a nome dei sindaci, dichiara di aver riveduto gli atti ed i documenti, e trovato tutto regolare.

Il Presidente ringrazia l'Amministratore ed i Sindaci.

2. *Congresso dell'U. M. I. a Bologna nel 1940*. — Il Presidente dà notizie sulla preparazione del Congresso di Mat. della U. M. I. da tenersi nelle vacanze pasquali del 1940 a Bologna.

Il Comitato Ordinatore si riunirà oggi stesso di nuovo. (V. appresso il rendiconto della seduta).

3 *Bollettino dell'U. M. I.* — Il Presidente ricorda che coll'inizio di una nuova serie del « Bollettino », il campo d'azione del nostro Sodalizio si è esteso comprendendo, insieme colle questioni di matematica pura ed applicata, anche, nel suo complesso, i problemi dell'insegnamento e della scuola. Il « Bollettino » escirà ogni anno accademico in 5 fascicoli, ciascuno di circa sei fogli di stampa, ed in ciascun fascicolo saranno distinte due Sezioni: la prima, che conserverà il tipo tradizionale del nostro periodico, l'altra storico-didattica. La intestazione: « Piccole note » potrà essere tralasciata, o modificata, a partire dal volume successivo; le note potranno aggirarsi intorno alle 8 pagine per la sezione scientifica, ed alle 16 per la storico-didattica. Così pure potrà essere modificato l'indirizzo di alcune rubriche. Per es. il « Bollettino bibliografico », se si vorrà continuare, potrà essere rivolto di preferenza alle pubblicazioni matematiche contenute in Atti di Accademie dove si trovano frammischiate

a quelle di altre scienze, e meno agevolmente vengono alle mani di studiosi di matematica.

4. *Pubblicazione di Opere.* — L'U. M. I. ha preso l'iniziativa di promuovere e curare la pubblicazione delle opere di grandi matematici italiani, incominciando da quelle di DINI, BIANCHI, CASORATI, PEANO, RICCI-CURBASTRO, VERONESE.

È già iniziato il lavoro di preparazione per le opere dei primi tre autori: ne riferiscono rispettivamente i prof. Sansone, Bortolotti Enea, Berzolari che hanno già redatto per ciascuno di quelli un elenco completo dei lavori, ripartiti in gruppi (per argomenti).

Per il DINI si hanno 62 memorie di 1814 pagine; tenuto conto dei commenti occorreranno 4 volumi di circa 500 pagine. Se il finanziamento lo consentirà, si potrà anche pensare alla ristampa dell'opera: *Sugli sviluppi in serie ecc.*, di pag. 482.

Per il BIANCHI si hanno 158 lavori di Geometria per 3872 pagine e 31 di Aritmetica, Algebra, Analisi per 551 pagine; occorreranno quindi 9 volumi. Si potrà esaminare in seguito l'opportunità di stampare il corso (litografato) *Sulla teoria aritmetica delle forme binarie e ternarie*, di pag. 712.

Per il CASORATI si hanno 46 lavori per complessive 459 pagine; da raccogliersi in un volume.

Il prof. BERZOLARI riferisce anche sugli accordi presi col prof. Somigliana per opere per PEANO.

Si esaminano quindi l'onere finanziario per la pubblicazione di tali opere ed i mezzi per provvedervi; fra questi una sottoscrizione per l'acquisto dei singoli volumi a prezzo inferiore a quello di edizione.

L'assemblea ringrazia i tre relatori ed approva il piano dei lavori da essi predisposto.

La seduta è tolta alle ore 16,45.

Il Segretario

ETTORE BORTOLOTTI

Il Presidente

LUIGI BERZOLARI

Secondo Congresso della U. M. I. - Comitato ordinatore del Congresso. — (Prof. L. Berzolari, presidente; proff.: E. Bompiani, Ettore Bortolotti, A. Comessatti, A. Ghigi, D. Graffi, G. Manzoni, S. E. U. Puppini, G. Sansone, F. Sibirani).

Riunione del 23 Aprile 1939-XVII. — Il giorno 23 Aprile, alle ore 17 si è radunato, in una sala dell'Istituto Matematico della R. Università di Bologna, il Comitato ordinatore del 2° Congresso della U. M. I.

Sono presenti S. E. U. Puppini e i proff. Berzolari, Bompiani, Bortolotti Ettore, Sansone, Sibirani. Hanno scusata l'assenza i proff. A. Ghigi, D. Graffi, A. Comessatti. Presiede il prof. Berzolari.

Il Presidente comunica che il 27 Marzo si è riunita la sottocommissione esecutiva (Bortolotti Ettore, Graffi, Sansone, Sibirani), per formulare il programma di massima ed avviare le pratiche necessarie.

Scopo del Congresso è porre in luce l'attività matematica italiana nel

RESOCONTO FINANZIARIO 1938

ENTRATE	USCITE	
Deposito nel libretto postale e presso l'Amministratore Levi, al 1° gennaio L. Interessi sul deposito nel libretto postale (1937) » Interessi sui titoli: Rendita nominativa L. 7800 — » al portatore » 149,50 Buoni del tesoro 4 0/0 » 320 — » » 5 0/0 » 100 — Quota di socio perpetuo L.	5226 113 — 8369 250 —	116 1000 200 204 7255 764 3000 361 40 12941 1018 13960
	83 70 — 50 — —	Tassa di manomorta (1937-38) L. Premio Fubini pagato al dott. E. Martinelli » Stampati vari » Spese per il censimento dei soci di razza ebraica » Acconto alla Tipografia Rossetti per la stampa degli Atti del Congresso 1937 » Rimborso di viaggio a Roma ai membri della Commissione scientifica » Alla Casa Editrice N. Zanichelli contributo per la stampa del Bollettino, oltre alla cessione degli abbonamenti e quote sociali . . . » Spese postali e varie rimborsate al Presidente, Segretario e Amministratori » Mancata al bidello dell'Istituto Matematico . . » A PAREGGIO: Nel libretto postale L. 750,— Presso l'Amministratore al 31 dicembre » 268,88
13960	03	L.
		03

campo teorico-pratico durante l'ultimo triennio, e prospettare gli orientamenti degli studi nella scuola matematica italiana.

Il Congresso si svolgerà nei locali della R. Università di Bologna, ed in esso saranno tenuti i seguenti discorsi generali:

U. PUPPINI, *Discorso inaugurale*; F. SEVERI, *Teoria delle corrispondenze*; C. SOMIGLIANA, *Gravitazione e figura della terra*; G. SANSONE, *Equazioni differenziali*; A. SIGNORINI, *Deformazioni finite*; L. TONELLI, *La Scuola Normale Superiore di Pisa e gli studi matematici*; G. RICCI, *Recenti risultati nella teoria dei numeri*; — ... *Questioni matematiche attinenti ai metodi di prospezione geologica*.

I lavori del Congresso consisteranno nelle conferenze generali elencate ed in lavori di Sezioni, così costituite: 1.° Analisi; 2.° Geometria; 3.° Meccanica e Fisica matematica; 4.° Idraulica ed idrodinamica; 5.° Geodesia e Geofisica; 6.° Ottica, Fotogrammetria, Astronomia, Astrofisica; 7.° Matematica finanziaria e Statistica, Calcolo delle probabilità; 8.° Applicazioni della Matematica alla scienza delle costruzioni; 9.° Storia della Matematica, Didattica, Fondamenti.

Viene poi esaminato uno schema di piano finanziario, in cui sono preventivate le spese occorrenti ed i possibili contributi.

Su questo punto dà alcune indicazioni S. E. Puppin.

Il Presidente del Comitato ringrazia vivamente S. E. Puppin.

La seduta è levata alle ore 18.

Il Segretario

ETTORE BORTOLOTTI

Il Presidente

LUIGI BERZOLARI

INDIRIZZI degli Autori che hanno pubblicato in questo fascicolo.

L. AMOROSO, via delle Tre Madonne 14, ROMA — L. BERETTA, viale dei Mille 45, FIRENZE — ETORE BORTOLOTTI, viale Albertazzi 43, BOLOGNA — U. BROGGI, rue Stoeber 7, STRASBURG (Francia) — A. COMESSATTI, via Sannicheli 49, PADOVA — S. FAEDO, Scuola matematica, Città Universitaria, ROMA — D. GRAFFI, via Indipendenza 81, BOLOGNA — M. MANARINI, via S. Lucia 6, BOLOGNA — U. MORIN, S. Pietro 2-A, PADOVA — G. PALAMÀ, via Sepolcri Messapici 20, LECCE — M. PICONE, via Tre Madonne 14, ROMA — F. SIBIRANI, Piazza Umberto I° 7, BOLOGNA — L. TOSCANO, via Placida 462, MESSINA

EZIO DELLA MONICA, *direttore responsabile*

Cooperativa Tipografica Azzoguidi - Bologna V-1989-(XVII)

Nuovi Soci (¹).

Azzolini prof. Domenico, r. liceo classico - Verona.
Barba prof. Guido, Tino da Camaino, 3 - Napoli.
Burani dott. Leonardo, Lorenzo il Magnifico, 50 - Roma.
Cammarata dott. Angelo, Corso Ruggero, 21 - Cefalù.
** Carruccio prof. Ettore, r. liceo S. Maffei - Verona.
Cassinis prof. Gino, r. politecnico - Milano.
** Confederazione fascista Lavoratori del Commercio - Roma.
Di Dia prof. Giuseppe, Scarlatti, 7 - Milano.
Ferretti-Torricelli prof. Angelo, liceo scientifico - Brescia.
Filosto prof. Michele, Isolato, 505 - Messina.
Giaccardi prof. Fernando, A. Avogadro, 19 - Torino.
Griffini prof. Maria, 24 maggio, 2 - Pavia.
Lenzi prof. Enrico, R. Righetti, 8/11 - Genova.
Marengoni prof. Ardiccio, Matris Domini, 7 - Bergamo.
Martinotti prof. Pietro, Deza, 29 - Milano.
Mikelli ing. Guido, Monte d'oro, 28 - Roma.
** Morin prof. Ugo, S. Pietro, 2 A - Padova.
Pascotto dott. Libera, Vittorio Emanuele, 67 - Pavia.
R. Ginnasio « G. Balbo » - Torino.
R. Università - Trieste.
Salini prof. Ugo - Risorgimento, Isolato, 77 - Messina.
Scuola Militare - Roma.
Vecchio prof. Orazio - Aci Catena (Catania).
Venturelli prof. Lucia, XX settembre, 5 - Padova.

(¹) Vedi Elenco dei Soci « Boll. U. M. I. », anno XVII, n. 4, pag. 252.

** Socio perpetuo.