Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Filippo Sibirani

Il Trattato delle spirali di Archimede

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2,
Vol. **1** (1939), n.3, p. 259–274.
Unione Matematica Italiana
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_3_259_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1939.

Il Trattato delle spirali di Archimede.

Nota di F. Sibirani (a Bologna) (*).

La parte del libro che costituisce il vero trattato sulle spirali si inizia con le seguenti 7 definizioni:

I. *Se si conduce una retta in un piano e, fisso uno dei suoi estremi, ruoti con moto equabile fino a che ritorni alla posizione iniziale, e mentre la retta si muove, un punto scorra su di essa con moto equabile, a partire dall'estremo fisso; il punto descriverà sul piano una* ***spirale*** (11).

II. *L'estremo della retta che, mentre essa ruota, sta fisso si chiama* ***principio della spirale.***

III. *La posizione della linea da cui la retta incomincia a muoversi:* ***principio di rotazione.***

IV. *La retta che il punto percorre nella prima rotazione si chiama* ***prima*** (12).

V. *La superficie compresa dalla spirale nella prima rotazione e dalla retta prima si dice prima, quella compresa dalla spirale nella seconda rotazione e dalla retta seconda* (13) *si chiama seconda. E così si chiamano le altre ordinatamente.*

VI. *E se dal punto che è il principio della spirale si conduce una retta, quelle linee che sono dalla stessa parte in cui avviene la rotazione si chiamano* ***precedenti****, quelle che sono dall'opposta parte* ***conseguenti.***

VII. *Il circolo, il cui centro è il punto principio della spirale ed il raggio la retta prima, si chiami* ***primo****; il circolo, il cui centro è lo stesso di prima ed il raggio doppio della retta antecedente, si chiama* ***secondo.*** *E così gli altri ordinatamente.*

Seguono ora 17 proposizioni e parecchi corollari.

Propos. XII - Teorema. — *Se ad una spirale, descritta in una qualunque rotazione, si conducono dal principio di essa rette quante*

(*) Continuazione e fine, v. num. precedente, pag. 172.

(11) Archimede la chiama ἕλιξ.

(12) È il segmento che unisce il principio della spirale all'estremo dell'arco di spirale costruita con una rotazione di 360°.

(13) Per *seconda retta* si intende il segmento che unisce i due punti della spirale che si trovano sulla posizione iniziale del raggio ruotante (il principio di rotazione secondo Archimede) l'uno dopo la rotazione di 360° e l'altro dopo la rotazione di 720°.

si vogliono che facciano fra loro angoli eguali, desse eccedono fra loro di eguale quantità.

Detto A il principio della spirale, se B, C, D, E,... sono punti della spirale in guisa che gli angoli BAC, CAD, DAE,... siano eguali, nello stesso tempo che il raggio ruotante passa dalla posizione AB alla AC, dalla AC alla AD, ecc., il punto che si muove sul raggio passa da B a C, da C a D, da D ad E ecc., anche AC supera AD, di quanto AD supera AC, di quanto AE supera AD, ecc..

PROPOS. XIII - TEOREMA. — *Se una retta è tangente alla spirale, la toccherà in un sol punto* (14).

Suppongasi che una retta r tangente alla spirale in B lo sia pure in C. Dal principio A della spirale si conducano i raggi AB, AC e la bisettrice dell'angolo BAC, che taglia la spirale in H e la r in K. Pel teorema precedente è $\overline{AB} + \overline{AC} = 2\overline{AH}$, ma $\overline{AB} + \overline{AC} > 2\overline{AK}$, dunque K sta fra A ed H, cioè la retta r taglia la spirale perchè K è, come dice ARCHIMEDE, entro la spirale; dunque r non è tangente, contro l'ipotesi.

PROPOS. XIV - TEOREMA. — *Se ad una spirale descritta in una rotazione* (15) *si conducono due rette dal punto che è principio della spirale e queste si prolungano alla periferia del primo circolo, esse avranno la stessa ragione degli archi di circolo compresi fra l'estremo della spirale e l'estremo delle rette prolungate, che sono posti sulla periferia, presi detti archi dall'estremo della spirale verso le precedenti.*

Si considerino i due moti uniformi: 1° quello sul raggio ruotante del punto che descrive la spirale, 2° quello sul *primo circolo* dell'estremo della *prima retta*, al ruotare del raggio.

La proposizione II offre immediatamente la dimostrazione dell'enunciato.

Segue il

COROLLARIO. — *In simil modo si dimostrerà che ciò accade pure anche se una delle rette condotte incontrano la spirale nel suo estremo:*

PROPOS. XV - TEOREMA. — *Se ad una spirale descritta nella seconda rotazione si conducono due rette dal principio della spirale, avranno fra loro la stessa ragione degli archi antecedentemente ricordati presi insieme con l'intera periferia del circolo.*

(14) Cioè è tangente in un punto solo.

(15) Si deve intendere nella prima rotazione.

La dimostrazione è condotta nello stesso modo di quella della proposizione precedente. Seguono due corollari.

I. Corollario. — *Nello stesso modo si dimostrerà anche se si conducono rette ad una spirale descritta nella terza rotazione che tali rette hanno fra loro la stessa ragione che i detti archi insieme all'intera periferia presa due volte.*

II. Corollario. — *Nello stesso modo si dimostrerà anche che le rette condotte alle altre spirali hanno fra loro egual ragione dei detti archi insieme a tante volte la periferia quante ne indica il numero delle rotazioni meno uno; anche se una delle rette condotte incontro la spirale nel suo termine.*

Coi mezzi moderni la propos. XV e i due corollari sono una immediata conseguenza della definizione di spirale archimedea come la curva in cui il raggio vettore è proporzionale all'anomalia. L'equazione della spirale, in coordinate polari, è $\rho = a\omega$; se due suoi punti $P_1(\omega_1, \rho_1)$, $P_2(\omega_2, \rho_2)$ si congiungono col polo O (principio della spirale) è

$$\frac{\overline{OP_1}}{\overline{OP_2}} = \frac{a\omega_1}{a\omega_2} = \frac{r\omega_1}{r\omega_2}$$

se r è il raggio del primo circolo, secondo la nomenclatura archimedea.

Propos. XVI - Teorema. — *Se una retta è tangente alla spirale descritta nella prima rotazione e dal punto di contatto al punto che è principio della spirale si conduce una retta, gli angoli che la tangente fa con la retta ad essa condotta saranno diseguali e l'angolo che è nelle precedenti sarà ottuso e l'angolo nelle conseguenti acuto.*

Sia O il principio della spirale, A un punto della spirale in cui è condotta la tangente, B un punto della tangente dalla banda della retta OA opposta a quella in cui cade l'arco OA di spirale. Se si traccia il cerchio di centro O e raggio OA (fig. 6), l'arco OA di spirale è interno al cerchio, l'arco che segue OA esterno; il cerchio tagli la retta prima in C. Non potendo manifestamente essere l'angolo OAB acuto, dimostriamo che non può essere retto: se fosse retto, la AB sarebbe tangente al circolo. In questa ipotesi, per la propos. V si può condurre da O una retta incontrante in D il circolo, in E la spirale, in F la tangente, tale che il rapporto $\overline{DF}:\overline{OD}$ sia minore del rapporto fra gli archi circolari AD e AC (gli archi per cui il senso da D a A e da A a C è il contrario del senso della rotazione generante la spirale):

allora il rapporto $\overline{OF}:OD$ è minore del rapporto fra gli archi circolari DAC, AC. I prolungamenti di OF, OA incontrino il circolo primo in G ed H e sia OL la retta prima. Il rapporto fra gli archi DAC, AC eguaglia il rapporto fra gli archi del circolo

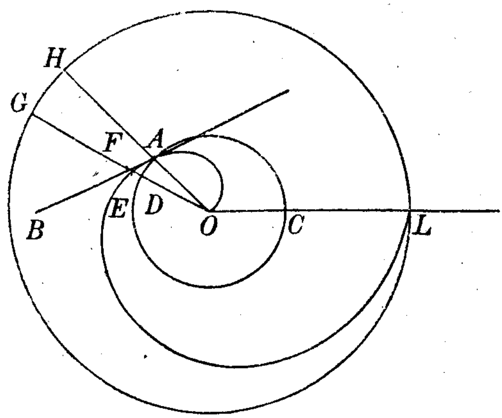

Fig. 6

primo GHL, HL e questo rapporto, per la propos. XIV, eguaglia il rapporto fra i segmenti $\overline{OE}$, $\overline{OA}$; ne consegue $\overline{OF}:\overline{OD} < \overline{OE}:\overline{OA}$, ma essendo $\overline{OD} = \overline{OA}$, ne verrebbe $\overline{OF} < \overline{OE}$, ciò che non può essere. Dunque l'angolo OAB è ottuso.

Corollario. — *In simil modo si dimostra che ciò accade anche se la tangente incontra la spirale nel suo termine* ([16]).

Propos. XVII - Teorema. — *Lo stesso accade anche se una retta è tangente alla spirale descritta nella seconda rotazione.*

La dimostrazione si fa in maniera del tutto analoga alla precedente, ricorrendo alla propos. XV.

Corollario. — *In simil modo si dimostrerà anche se una retta fosse tangente alla spirale descritta in una qualsivoglia rotazione, anche se nel suo termine, che essa farà colla retta condotta dal principio della spirale al punto di contatto angoli disegnati e l'angolo che è nelle precedenti è ottuso, quello che è nelle conseguenti acuto.*

Coi mezzi moderni le ultime due proposizioni e relativi corollari si dimostrano così. Sia data l'equazione di una curva in coordinate polari $\rho = f(\omega)$ e si dica γ l'angolo che il raggio vettore forma con la semiretta tangente alla curva in un punto

([16]) Cioè se la tangente è mandata nell'estremo della retta prima.

$P(f(\bar{\omega}), \bar{\omega})$, semiretta che sta rispetto alla congiungente il polo con P dalla banda in cui per i punti della curva è $\omega < \bar{\omega}$. Allora è

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{f(\bar{\omega})}{f'(\bar{\omega})}.$$

Per la spirale $\rho = a\omega$ è $\operatorname{tg} \gamma = \bar{\omega} > 0$, perciò $\gamma < \frac{\pi}{2}$.

PROPOS. XVIII - TEOREMA. — *Se una retta è tangente alla spirale descritta nella prima rotazione* [17] *e dal punto che è principio della spirale si conduca una perpendicolare al principio di rotazione, la retta così condotta incontrerà la tangente e la porzione di essa posta fra la tangente ed il principio della spirale sarà eguale alla periferia del circolo primo.*

Sia O il principio della spirale, A l'estremo della retta prima, pel quale è condotta la tangente t alla spirale (fig. 7); da O si mandi la perpendicolare al *principio di rotazione,* che incontra in B la tangente. Si deve dimostrare che $\overline{OB}$ è lungo quanto il primo circolo, lunghezza che indicheremo con χ. Sia, se è possibile, $OB > \chi$. Sulla OB prendiamo il punto C in modo che sia $\chi < \overline{OC} < \overline{OB}$. La tangente t tagli il circolo primo in D e sia E il punto di mezzo di AD. Dai triangoli simili AOE, AOB si ricava $\overline{AE}:\overline{OE} = \overline{OA}:\overline{OB}$ e poichè $\overline{OC} < \overline{OB}$, sarà $\overline{AE}:\overline{OE} < \overline{OA}:\overline{OC}$. Pertanto si potrà, per la propos. VII, condurre da A una retta che incontra il primo circolo in G e la tangente t in F in modo che sia $\overline{GF}:\overline{AG} = \overline{OA}:\overline{OC}$, ossia $\overline{GF}:\overline{OG} = \overline{AG}:\overline{OC}$. Ma il segmento $\overline{AG}$ è minore dell'arco $\widehat{AG}$ e $\overline{OC} > \chi$, perciò $\overline{AG}:\overline{OC} < \widehat{AG}:\chi$, quindi

$$\overline{GF}:\overline{OG} < \widehat{AG}:\chi,$$

$$\overline{OF}:\overline{OG} < (\widehat{AG} + \chi):\chi.$$

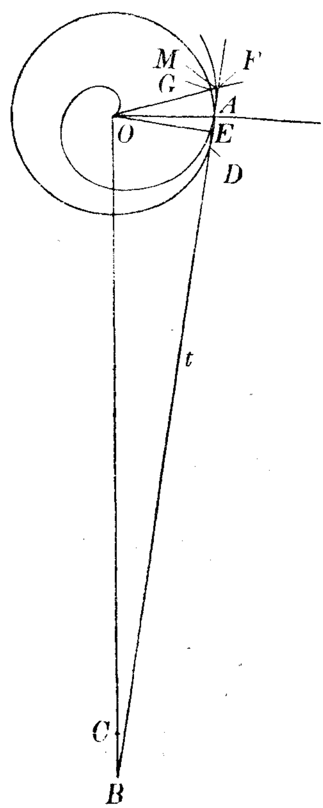

Fig. 7

[17] Nel punto che è estremo della prima retta.

Ma per la propos. XV, se H è il punto in cui OG incontra la spirale nella seconda rotazione,

$$(\widehat{AG}+\chi):\chi=\overline{OH}:\overline{OA}.$$

Dunque $\overline{OF}:\overline{OG}<\overline{OH}:\overline{OA}$, il che è impossibile perchè mentre è $\overline{OG}=\overline{OA}$, è $\overline{OF}>\overline{OH}$. Con ciò è provato che non può essere $\overline{OB}>\chi$.

Suppongasi ora, se è possibile, che sia $\overline{OB}<\chi$. Si conduca la tangente in A al circolo primo e nella OB si prenda il punto C' in modo da essere $\chi>\overline{OC'}>\overline{OB}$. Si vede subito che è $\overline{OA}:\overline{OC'}<\overline{AE}:\overline{OE}$. Si può allora, per la propos. VIII, mandare

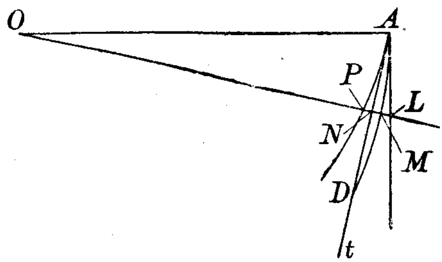

Fig. 8

per O una retta che incontra (vedi figura schematica 8) in L la tangente al primo circolo, il primo circolo in M, la corda AD in N e la spirale in P, in modo che sia $\overline{MN}:\overline{AL}=\overline{OA}:\overline{OC'}$ od anche $\overline{MN}:\overline{OM}=\overline{AL}\cdot\overline{OC'}$. Ma essendo $\overline{AL}$ maggiore dell'arco $\widehat{AM}$ ed $OC'<\chi$, è $\overline{AL}:\overline{OC'}>\widehat{AM}:\chi$, perciò anche $\overline{MN}:\overline{OM}>\widehat{AM}:\chi$, ed ancora

$$(\overline{OM}-\overline{MN}):\overline{OM}>(\chi-\widehat{AM}):\chi \quad \text{ossia} \quad \overline{ON}:\overline{OM}<(\chi-\widehat{AM}):\chi.$$

Ma, per la propos. XIV, è $\overline{OP}:\overline{OA}=(\chi-\widehat{AM}):\chi$, dunque $\overline{ON}:\overline{OM}<OP:\overline{OA}$, ciò che non può essere perchè, mentre $\overline{OM}=\overline{OA}$ è $\overline{ON}<\overline{OP}$. Non può dunque essere nemmeno $\overline{OB}<\chi$ e perciò sarà $\overline{OB}=\chi$.

PROPOS. XIX - TEOREMA. — *Se poi una retta è tangente alla spirale nella seconda rotazione nel suo estremo e si conduca una retta dal principio della spirale perpendicolare al principio di rotazione, essa incontrerà la tangente e quella parte compresa fra la tangente ed il principio della spirale sarà eguale al doppio della periferia del secondo circolo.*

La dimostrazione è del tutto analoga a quella della proposizione precedente.

COROLLARIO. — *Nello stesso modo si dimostra anche se una retta è tangente all'estremo della spirale descritta in una qualsivoglia rotazione e dal principio della spirale si conduca una retta perpendicolare al principio di rotazione e incontri la tangente, essa è tante volte multipla della periferia* [18] *quante ne indica il numero delle rotazioni.*

PROPOS. XX - TEOREMA. — *Se una retta è tangente ad una spirale descritta nella prima rotazione, fuori dal suo estremo, e condotta dal punto di contatto una retta al principio della spirale, si descriva il circolo il cui centro sia il detto principio ed il raggio la retta condotta ed anche si cali una perpendicolare a quest'ultima, essa incontrerà la tangente e quella sua porzione posta fra il punto d'incontro e il principio della spirale sarà eguale all'arco di circolo descritto fra il punto di contatto ed il punto di sezione in cui il circolo descritto taglia il principio di rotazione, preso il detto arco dal punto nel principio di rotazione verso le precedenti.*

Anche la dimostrazione di questo teorema è fatta in modo analogo alle precedenti.

COROLLARIO. — *Nello stesso modo si dimostrerà se una retta è tangente ad una spirale descritta nella seconda rotazione, fuori del suo estremo, avendo costruite tutte le altre linee, che la porzione della retta che incontra la tangente compresa fra il punto di incontro ed il principio della spirale è eguale alla periferia del circolo descritto ed inoltre all'arco compreso fra i detti punti; avendo preso l'arco nello stesso modo. E se anche una retta sia tangente ad una spirale descritta in una qualsivoglia rotazione, fuori dal suo estremo, avendo costruite le altre linee, la retta compresa fra i detti punti è tante volte multipla della periferia del circolo descritto, quante ne indica il numero delle rotazioni meno uno ed inoltre eguale all'arco, fra i detti punti, preso nello stesso modo.*

Coi mezzi moderni le propos. XVIII, XIX, XX e i corollari si dimostrano immediatamente e simultaneamente. Dato una curva, riferita a coordinate polari, $\rho = f(\omega)$, si dice *sottotangente polare* in un punto $P(f(\omega), \omega)$ il segmento di perpendicolare al raggio vettore OP per il polo O compreso fra il polo e la tangente. Se OS è la sottotangente, il triangolo POS è rettangolo in O, onde

$$\overline{OS} = \overline{OP} \operatorname{tg} \widehat{OPS} = f(\omega) \frac{f(\omega)}{f'(\omega)}$$

tenendo conto di quanto abbiamo detto in seguito al corollario

[18] Del circolo che ha lo stesso numero d'ordine della rotazione.

della propos. XVII. Per la spirale $\rho = a\omega$, la sottotangente polare nel punto P di coordinate $\rho = a\omega$, $\omega = \omega$ ha la lunghezza $\rho\omega$. Se $\omega = 2n\pi + \alpha$ (cioè se P appartiene all'arco di spirale della $(n+1)$-esima rotazione) la lunghezza della sottotangente polare è $2n\pi\rho + \alpha\rho$, ciò che dimostra le proposizioni enunciate.

PROPOS. XXI - TEOREMA. — *Presa la superficie contenuta dalla spirale descritta nella prima rotazione e dalla prima delle rette che sono nel principio di rotazione, è possibile circoscrivere intorno a questa superficie una figura piana ed inscriverne una altra composta di settori simili in modo che la figura circoscritta superi la inscritta di una superficie minore della data* [19].

Se O è il principio della spirale, A l'estremo della spirale dopo la prima rotazione, si divida il circolo primo in quattro parti mediante il diametro per A e quello ad esso perpendicolare. Col dividere uno dei quattro settori, ad es. quello corrispondente alla rotazione dell'ultimo angolo retto, in 2, 4, 8,... parti eguali, si perverrà ad un settore di area inferiore a quella di una qualunque prefissata superficie. Sia questo settore AOA', ottenuto dividendo l'angolo retto in un numero di 2^n parti eguali. Dal principio della spirale si mandino tanti raggi formanti fra loro angoli eguali a quello del settore AOA', e l'ultimo raggio sia OA. I raggi incontrino la spirale nei punti P_1, P_2, P_3,... $P_{2^n} \equiv A$. Per ciascuno dei punti P_i si faccia passare un cerchio di centro O e di esso cerchio si consideri l'arco compreso fra i raggi OP_{i-1} e OP_{i+1}. Su ogni raggio OP_i cadono due estremi di archi; diciamo M_i quello più vicino ad O, N_i l'altro. I settori circolari $P_{i-1}OM_i$ formano una figura inscritta — dice ARCHIMEDE — ed i settori $N_{i-1}OP_i$ formano una figura circoscritta alla superficie S limitata dalla spirale nella prima rotazione e dalla retta prima.

È chiaro che i settori circolari $N_{i-1}OP_i$ e P_iOM_{i+1} sono eguali, perciò la figura circoscritta supera l'inscritta del settore $M_{2^n-1}OP_{2^n} = AOA'$; la proposizione è così dimostrata.

COROLLARIO. — *Di qui è manifesto che si può circoscrivere intorno alla detta superficie una figura della specie indicata in modo che la figura circoscritta ecceda la superficie di una quantità minore della data, e di nuovo inscriverne una in modo che la superficie ecceda la figura inscritta di una superficie minore della data.*

PROPOS. XXII - TEOREMA. — *Presa la superficie contenuta dalla spirale descritta nella seconda rotazione e dalla seconda delle rette che sono nel principio di rotazione, si può intorno ad essa*

[19] Si deve intendere « di una prefissata superficie ».

superficie circoscrivere una figura piana ed un'altra inscriverne composta di settori simili in modo che la figura circoscritta superi la inscritta di una superficie minore della data.

La dimostrazione è analoga alla precedente. Seguono due corollari:

I. COROLLARIO. — *È evidente adunque che la figura circoscritta può eccedere la superficie data di una superficie minore della data e che la superficie data può superare la figura inscritta di una superficie minore della data.*

II. COROLLARIO. — *Per la stessa ragione è evidente che presa la superficie contenuta dalla spirale in una qualsivoglia rotazione e dalla retta di egual nome di quelle che sono nel principio di rotazione, si può circoscrivere una figura piana della stessa specie di cui si è parlato, in modo che la figura circoscritta ecceda la superficie data di una superficie minore della data, ed inscriverne un'altra in modo che la superficie data ecceda la figura circoscritta di una superficie minore della data.*

PROPOS. XXIII - TEOREMA. — *Presa una superficie contenuta dalla spirale che sia minore di quella da essa descritta nella prima rotazione, ma il cui estremo non è il principio della spirale, condotte le rette dai termini della spirale* [20], *si può circoscrivere intorno a questa superficie una figura piana ed un'altra inscrivervi composta di settori simili, in modo che la differenza di cui la figura circoscritta supera la inscritta sia minore della superficie data.*

La dimostrazione è analoga alle precedenti.

COROLLARIO. — *Di qui è manifesto che si può intorno alla detta superficie circoscriverne una figura piana in modo che la figura circoscritta ecceda la superficie di una quantità minore della superficie data, e si può inscriverne una in modo che quella superficie ecceda la figura inscritta di una superficie minore della data.*

PROPOS. XXIV - TEOREMA. — *La superficie compresa dalla spirale descritta nella prima rotazione e dalla prima delle rette che sono nel principio di rotazione è la terza parte del primo circolo.*

Sia S la superficie limitata dalla spirale nella prima rotazione e dalla retta prima; sia Σ la terza parte del primo circolo. Sia questo circolo diviso in 2^n settori eguali e si circoscrivano alla superficie S altrettanti settori circolari come è detto nella dimo-

[20] Cioè i raggi dal principio della spirale agli estremi dell'arco di spirale presa a considerare.

strazione della propos. XXI; n può essere stato preso tanto grande perchè la superficie circoscritta superi S di meno della differenza fra Σ e S, supposto che sia S minore di Σ; allora la superficie circoscritta è minore di Σ.

Per il corollario della propos. X, l'area del circolo primo è minore del triplo dell'area della figura circoscritta, minore, a più forte ragione, del triplo di Σ, ciò che è assurdo.

Si supponga invece che S sia maggiore di Σ; il numero n si può supporre preso in modo che S superi la superficie inscritta nel solito modo per meno della differenza fra S e Σ, cosicchè la superficie inscritta è maggiore di Σ. Per il corollario citato, l'area del circolo primo è maggiore del triplo della somma dei settori interni alla spirale, cioè Σ è maggiore della superficie inscritta, ciò che contraddice a quanto si è detto dianzi. Dunque S e Σ hanno la stessa area.

Abbiamo esposta, non nella forma ma nella sostanza, la dimostrazione di Archimede. Coi mezzi moderni l'area di S è

$$\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\omega^2 d\omega = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{(2\pi)^3}{3} = \frac{1}{3}\pi(2\pi a)^2$$

ove $2\pi a$ è il raggio del circolo primo, secondo la nomenclatura archimedea.

Propos. XXV – Teorema. — *La superficie compresa dalla spirale nella seconda rotazione e dalla seconda delle rette che sono nel principio di rotazione ha al secondo circolo la ragione che ha 7 a 12, che è quella stessa ragione che ha il rettangolo formato dal raggio del secondo circolo e dal raggio del primo insieme alla terza parte del quadrato della differenza di cui il raggio del secondo circolo supera quello del primo, al quadrato del raggio del secondo circolo.*

Indichiamo il modo di dimostrazione di Archimede. Sia O il principio della spirale, OA il raggio del cerchio primo, OB quello del circolo secondo. È manifestamente $\overline{OB} = 2\overline{OA}$, onde $\overline{OB}^2 = 4\overline{OA}^2$. Si consideri un cerchio Σ, il quadrato del cui raggio sia eguale al rettangolo di lati $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ più un terzo del quadrato costruito su AB (o, ciò che fa lo stesso, su OA); il quadrato di questo raggio è pertanto eguale a $\frac{7}{3}\overline{OA}^2$. Perciò l'area di Σ sta all'area del secondo circolo come 7 a 12. Si tratta di dimostrare che l'area della superficie S limitata dalla spirale nella seconda rotazione e dalla retta seconda (cioè dal segmento AB) è eguale a quella di Σ.

La dimostrazione procede per assurdo. Sia l'area di Σ maggiore di quella di S. Intorno ad S si può circoscrivere una figura di settori circolari nel modo già indicato in guisa che la differenza fra la superficie circoscritta ad S sia minore della differenza fra Σ ed S, perciò la superficie circoscritta è minore di Σ. Per il corollario della propos. XI, il circolo secondo ha alla superficie circoscritta una ragione minore di quella che il quadrato di lato $\overline{OB}$ (raggio del secondo circolo) ha al rettangolo di lati $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ più un terzo del quadrato di $\overline{AB}$; cioè il secondo circolo ha alla superficie circoscritta un rapporto minore di 12:7 che è il rapporto fra secondo circolo e Σ; allora la superficie circoscritta è maggiore di Σ, contro l'ipotesi. In modo analogo si dimostra che non può essere l'area di Σ minore di quella di S.

Coi mezzi moderni, l'area di S è

$$\frac{a^2}{2}\int_{2\pi}^{4\pi}\omega^2 d\omega = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{(4\pi)^3-(2\pi)^3}{3} = \frac{7}{12}\pi(4\pi a)^2$$

ove $\pi(4\pi a)^2$ è manifestamente l'area del circolo secondo.

Corollario. — *Nello stesso modo si dimostra che anche la superficie compresa dalla spirale descritta in una qualsivoglia rotazione e dalla retta di egual nome delle rotazioni ha al circolo pure di egual nome la stessa ragione del rettangolo compreso dal raggio del circolo di egual nome e dal raggio del circolo di egual numero al primo meno uno, insieme alla terza parte del quadrato della differenza di cui il raggio del circolo maggiore supera il raggio del circolo minore, al quadrato del raggio del circolo maggiore dei nominati.*

Coi mezzi moderni questo corollario così si dimostra. L'area compresa dalla spirale nella n-esima rotazione e dalla retta n-esima è

$$\frac{a^2}{2}\int_{2(n-1)\pi}^{2n\pi}\omega^2 d\omega = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{(2n\pi)^3-\{2(n-1)\pi\}^3}{3} = 4\pi^3a^2\left(n^2-n+\frac{1}{3}\right);$$

l'area del circolo n-esimo è $\pi(2n\pi a)^2 = 4\pi^3n^2a^2$; il rapporto fra la prima e la seconda area è $1-\frac{1}{n}+\frac{1}{3n^2}$. Il rettangolo che ha per lati i raggi dei circoli n-esimo ed $(n-1)$-esimo e la terza parte del quadrato costruito sul raggio del circolo primo hanno l'area

$$2n\pi a\cdot 2(n-1)\pi a+\frac{(2\pi a)^2}{3} = 4\pi^2a^2\left(n^2-n+\frac{1}{3}\right)$$

e quest'area al quadrato costruito sul raggio del circolo n–esimo ha il rapporto

$$\frac{4\pi^2a^2\left(n^2-n+\frac{1}{3}\right)}{4n^2\pi^2a^2}=1-\frac{1}{n}+\frac{1}{3n^2}.$$

PROPOS. XXVI – TEOREMA. — *La superficie compresa dalla spirale minore di quella descritta in una rotazione ed il cui estremo non è il principio della spirale e dalle rette condotte dai suoi estremi al principio della spirale ha al settore il cui raggio è eguale alla maggiore delle rette nominate e il di cui arco è posto fra quelle rette e verso quella stessa parte in cui è la spirale, la stessa ragione di quella che na il rettangolo formato dalle rette condotte dai termini al principio della spirale insieme alla tarza parte del quadrato della differenza di cni la maggiore delle rette nominate supera la minore al quadrato della maggiore.*

Il procedimento della dimostrazione di ARCHIMEDE è sostanzialmente quello usato nelle dimostrazioni delle precedenti proposizioni. Facciamo la dimostrazione coi nostri mezzi. Sia AB l'arco di spirale; le coordinate di A siano $\omega=\omega_1$, $\rho=a\omega_1$, quelle di B siano $\omega=\omega_2$, $\rho=a\omega_2$ con $0<\omega_2-\omega_1<2\pi$. Se O è il principio della spirale (polo) l'area del settore di spirale AOB è

$$\frac{a^2}{2}\int_{\omega_1}^{\omega_2}\omega^2d\omega=\frac{a^2}{2}\frac{\omega_2{}^3-\omega_1{}^3}{3}.$$

Il settore del circolo di centro O, raggio $a\omega_2$ e angolo $\omega_2-\omega_1$ ha l'are ι

$$\frac{1}{2}a^2\omega_2{}^2(\omega_2-\omega_1);$$

il rapporto fra la prima e la seconda area è

$$\frac{\omega_2{}^2+\omega_1\omega_2+\omega_1{}^2}{3\omega_2{}^2}.$$

Il rettangolo che ha per lati i raggi vettori $\rho_1=\overline{OA}$, $\rho_2=\overline{OB}$, aumentato della terza parte del quadrato costruito sulla differenza degli stessi raggi vettori ha l'area

$$a^2\omega_1\omega_2+\frac{a^2}{3}(\omega_2-\omega_1)^2=\frac{a^2}{3}(\omega_2{}^2+\omega_1\omega_2+\omega_1{}^2)$$

e quest'area ha a quella del quadrato costruito sul raggio vettore maggiore il rapporto

$$\frac{\omega_2^2 + \omega_2\omega_1 + \omega_1^2}{3\omega_2^2}.$$

PROPOS. XXVII - TEOREMA. — *Delle superficie comprese dalle spirali e dalle rette che sono nel principio di rotazione, la terza è doppia della seconda, la quarta ne è il triplo, la quinta ne è il quadruplo, e così sempre seguitando ordinatamente una superficie è tante volte multipla della seconda quante volte indicano i numeri che seguono ordinatamente. La prima superficie poi è la sesta parte della seconda.*

Chiamiamo S_1 la superficie racchiusa dalla spirale nella prima rotazione e dalla prima retta, con S_2 la superficie racchiusa dalla spirale nella prima e seconda rotazione e dalla retta seconda, con S_3 la superficie racchiusa dalla spirale nella seconda e terza rotazione e dalla retta terza, e così via. ARCHIMEDE comincia col considerare che la superficie racchiusa dalla spirale nella seconda rotazione e dalla seconda retta, cioè $S_1 + S_2$, sta al secondo circolo come 9 a 12, il secondo circolo sta al primo come 12 a 3; il primo circolo ad S_1 come 3 a 1, onde la superficie $S_1 + S_2$ sta a S_1 come 7 a 1, quindi S_2 sta a S_1 come 6 a 1. Così è dimostrata l'ultima parte del teorema.

Indichiamo con O il principio di rotazione, con $A_1, A_2, A_3, \ldots$ gli estremi successivi delle rette prima, seconda, terza, ... Si è dimostrato che $S_1 + S_2 + S_3$ sta al terzo circolo come $\overline{OA_2} \times \overline{OA_3} + \frac{1}{3}\overline{A_2A_3}^2$ sta a $\overline{OA_3}^2$; il terzo circolo sta al secondo come $\overline{OA_3}^2 : \overline{OA_2}^2$; il secondo circolo sta a $S_1 + S_2$ come $\overline{OA_2}^2$ sta ad $\overline{OA_1} \times \overline{OA_2} + \frac{1}{3}\overline{A_1A_2}^2$, dunque $S_1 + S_2 + S_3$ sta a $S_1 + S_2$ come $\overline{OA_2} \times \overline{OA_3} + \frac{1}{3}\overline{A_2A_3}^2$ sta ad $\overline{OA_1} \times \overline{OA_2} + \frac{1}{3}\overline{A_1A_2}^2$. Tenendo conto che $\overline{OA_2} = 2\overline{OA_1}$, $\overline{OA_3} = 3\overline{OA_1}$, $\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \overline{OA_1}$, si ha che $(S_1 + S_2 + S_3):(S_1 + S_2) = 19:7$, da cui $S_3:(S_1 + S_2) = 12:7$. Ma $(S_1 + S_2):S_2 = 7:6$, quindi $S_3 = 2S_2$.

Siano $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \ldots$ i circoli primo, secondo, terzo, ... Si sa che

$$(S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5):\Sigma_5 = \left\{ \overline{OA_4} \times \overline{OA_5} + \frac{1}{3}\overline{A_4A_5}^2 \right\} : \overline{OA_5}^2$$

$$\Sigma_5 : \Sigma_4 = \overline{OA_5}^2 : \overline{OA_4}^2$$

$$\Sigma_4 : (S_1 + S_2 + S_3 + S_4) = \overline{OA_4}^2 : \left\{ \overline{OA_3} \times \overline{OA_4} + \frac{1}{3}\overline{A_3A_4}^2 \right\}$$

onde

$$(S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5):(S_1 + S_2 + S_3 + S_4) =$$

$$= \left\{ \overline{OA_4} \times \overline{OA_5} + \frac{1}{3} \overline{A_4A_5}^2 \right\} : \left\{ \overline{OA_3} \times \overline{OA_4} + \frac{1}{3} \overline{A_3A_4}^2 \right\}$$

$$S_5:(S_1 + S_2 + S_3 + S_4) = \overline{OA_4} \times \overline{A_3A_5} : \left\{ \overline{OA_3} \times \overline{OA_4} + \frac{1}{3} \overline{A_3A_4}^2 \right\}$$

perchè $A_3A_4 = A_4A_5$ e $\overline{OA_5} - \overline{OA_3} = \overline{A_3A_5}$.

Così pure si dimostra che

$$S_4:(S_1 + S_2 + S_3) = \overline{OA_3} \times \overline{A_2A_4} : \left\{ \overline{OA_2} \times \overline{OA_3} + \frac{1}{3} \overline{A_2A_3}^2 \right\}$$

e quindi

$$S_4:(S_1 + S_2 + S_3 + S_4) = \overline{OA_3} \times \overline{A_2A_4} : \left\{ \overline{OA_3} \times \overline{OA_4} + \frac{1}{3} \overline{A_3A_4}^2 \right\}$$

perchè $\overline{OA_2} + \overline{A_2A_4} = \overline{OA_4}$ e $\overline{A_2A_3} = \overline{A_3A_4}$.

Si deduce

$$S_5 : S_4 = \overline{OA_4} \times \overline{A_3A_6} : \overline{OA_3} \times \overline{A_2A_4}$$

e per essere $\overline{A_3A_5} = \overline{A_2A_4}$, si trae $S_5 : S_4 = \overline{OA_4} : \overline{OA_3}$. In modo analogo si dimostra che $S_6 : S_5 = \overline{OA_5} : \overline{OA_4}$; $S_7 : S_6 = \overline{OA_6} : \overline{OA_5}$, ... e poichè $OA_6 : OA_5 : OA_4 : OA_3 = 6:5:4:3$ sarà

$$S_7 : S_6 : S_5 : S_4 = 6:5:4:3,$$

come volevasi dimostrare.

Coi mezzi moderni si ha

$$S_1 = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \omega^2 d\omega = \frac{4a^2\pi^3}{3}$$

$$S_2 = \frac{a^2}{2} \left[\int_{2\pi}^{4\pi} \omega^2 d\omega - \int_0^{2\pi} \omega^2 d\omega \right] = \frac{24a^2\pi^3}{3}$$

onde $S_2 = 6S_1$. È poi

$$S_n = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\omega \int_{a[\omega + 2(n-2)\pi]}^{a[\omega + 2(n-1)\pi]} \rho d\rho = 4a^2(n-1)\pi^3$$

onde

$$\frac{S_n}{S_{n-1}} = \frac{n-1}{n-2}$$

e poichè $S_3 = 2S_2$ è $S_n = (n-1)S_2$.

Propos. XXVIII - Teorema. — *Se sopra una spirale descritta in una qualsiasi rotazione si prendono due punti che non siano* *suoi termini e da questi punti si conducono rette al principio della spirale e si descrivono circoli il cui centro è il principio della spirale ed i raggi le rette che dai punti sono condotti al detto principio, la superficie compresa dall' arco del circolo maggiore posto fra le rette e dalla spirale interposta fra quelle medesime rette e il prolungamento della minore, avrà alla superficie compresa dall' arco del circolo minore, dalla stessa spirale e dalla retta congiungente i loro estremi, la ragione che ha il raggio del circolo minore insieme ai due terzi della differenza di cui il raggio maggiore supera il raggio del circolo minore al raggio del circolo minore insieme alla terza parte della differenza medesima.*

Sia O il principio della spirale, A_1A_2 due punti della spirale appartenenti ad una stessa rotazione e non coincidenti cogli estremi. Con raggi $\overline{OA}_1$ e $\overline{OA}_2$ $(\overline{OA}_2 > \overline{OA}_1)$ e centro in O si descrivano due archi di cerchio compresi fra le rette OA_1 e OA_2; l'arco di circolo maggiore incontri la retta OA_1 in M_1 e l'arco del cerchio minore incontri la retta OA_2 in M_2. L'arco della spirale divide il quadrilatero $A_1M_1A_2M_2$ in due parti, l'una Ω_1 dalla banda della spirale ove sta il principio della spirale, l'altra Ω_2. Si deve provare che è

$$\Omega_2 : \Omega_1 = \left\{ \overline{OA}_1 + \frac{2}{3}(\overline{OA}_2 - \overline{OA}_1) \right\} : \left\{ \overline{OA}_1 + \frac{1}{3}(\overline{OA}_2 - \overline{OA}_1) \right\}.$$

Eccone la dimostrazione seguendo ARCHIMEDE. Per la prop. XXVI il settore A_1OA_2 di spirale sta al settore circolare M_1OA_2 come il rettangolo di lati $\overline{OA}_1$, $\overline{OM}_1$ più $\frac{1}{3}$ del quadrato di lato $\overline{A_1M}_1$ sta al quadrato di lato $\overline{OM}_1$, cioè

$$A_1OA_2 : M_1OA_2 = \left\{ \overline{OA}_1 \times \overline{OM}_1 + \frac{1}{3}\overline{A_1M}_1^2 \right\} : \overline{OM}_1^2, \tag{1}$$

onde

$$\begin{aligned} &M_1OA_2 - A_1OA_2 : A_1OA_2 = \\ &= \left\{ \overline{OM}_1^2 - \overline{OA}_1 \times \overline{OM}_1 - \frac{1}{3}\overline{A_1M}_1^2 \right\} : \left\{ \overline{OA}_1 \times \overline{OM}_1 + \frac{1}{3}\overline{A_1M}_1^2 \right\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Dall'essere $\overline{OM}_1 = \overline{OA}_1 + \overline{A_1M}_1$. si trae

$$\overline{OM}_1^2 - \overline{OA}_1 \times \overline{OM}_1 - \frac{1}{3}\overline{A_1M}_1^2 = \overline{OA}_1 \times \overline{A_1M}_1 + \frac{2}{3}\overline{A_1M}_1^2$$

e poichè $M_1OA_2 - A_1OA_2 = \Omega_2$, la (2) diviene

$$\Omega_2 : A_1OA_2 = \left\{ \overline{OM}_1 + \overline{A_1M}_1 + \frac{2}{3}\overline{A_1M}_1^2 \right\} : \left\{ \overline{OA}_1 \times \overline{OM}_1 + \frac{1}{3}\overline{A_1M}_1^2 \right\}. \tag{2'}$$

Dalla (1) e dalla $A_1OM_2 : M_1OA_2 = \overline{OM}_2^2 : \overline{OM}_1^2$, tenendo conto che $\overline{OM}_2 = \overline{OA}_1$, si deduce

$$A_1OA_2 : A_1OM_2 = \left\{ \overline{OA}_1 \times \overline{OM}_1 + \frac{1}{3} \overline{A_1M}_1^2 \right\} : \overline{OA}_1^2$$

e poichè $A_1OA_2 = A_1OM_2 + \Omega_1$, si trae

$$A_1OA_2 : \Omega_1 = \left\{ \overline{OA}_1 \times \overline{OM}_1 + \frac{1}{3} \overline{A_1M}_1^2 \right\} : \left\{ \overline{OA}_1 \times \overline{OM}_1 + \frac{1}{3} \overline{A_1M}_1^2 - \overline{OA}_1^2 \right\}$$

ed essendo $\overline{OA}_1 \times \overline{OM}_1 - \overline{OA}_1^2 = \overline{OA}_1 \times \overline{A_1M}_1$, anche

$$(3) \quad A_1OA_2 : \Omega_1 = \left\{ \overline{OA}_1 \times \overline{OM}_1 + \frac{1}{3} \overline{A_1M}_1^2 \right\} : \left\{ \overline{OA}_1 \times \overline{A_1M}_1 + \frac{1}{3} \overline{A_1M}_1^2 \right\}.$$

Dalle (2') e (3) si deduce

$$\Omega_2 : \Omega_1 = \left\{ \overline{OA}_1 \times \overline{A_1M}_1 + \frac{2}{3} \overline{A_1M}_1^2 \right\} : \left\{ \overline{OA}_1 \times \overline{A_1M}_1 + \frac{1}{3} \overline{A_1M}_1^2 \right\}.$$

Ma è manifestamente

$$\left\{ \overline{OA}_1 \times \overline{A_1M}_1 + \frac{2}{3} \overline{A_1M}_1^2 \right\} : \left\{ \overline{OA}_1 \times \overline{A_1M}_1 + \frac{1}{3} \overline{A_1M}_1^2 \right\} =$$

$$= \left(\overline{OA}_1 + \frac{2}{3} \overline{A_1M}_1 \right) : \left(\overline{OA}_1 + \frac{1}{3} \overline{A_1M}_1 \right) =$$

$$= \left\{ \overline{OA}_1 + \frac{2}{3}(OA_2 - OA_1) \right\} : \left\{ OA_1 + \frac{1}{3}(OA_2 - OA_1) \right\}$$

perciò, come volevasi dimostrare, è

$$\Omega_2 : \Omega_1 = \left\{ \overline{OA}_1 + \frac{2}{3}(\overline{OA}_2 - \overline{OA}_1) \right\} : \left\{ \overline{OA}_1 + \frac{1}{3}(\overline{OA}_2 - \overline{OA}_1) \right\}.$$

Con mezzi moderni la proposizione si dimostra così. Se (ρ_1, ω_1) e (ρ_2, ω_2) (con $\omega_2 > \omega_1$ e $\omega_2 - \omega_1 < 2\pi$) sono le coordinate di due punti della spirale $\rho = a\omega$, le due aree dell'enunciato sono date rispettivamente da

$$\Omega_2 = \int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega \int_{a\omega}^{a\omega_2} \rho d\rho = \frac{a^2}{6}(2\omega_2 + \omega_1)(\omega_2 - \omega_1)^2$$

$$\Omega_1 = \int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega \int_{a\omega_1}^{a\omega} \rho d\rho = \frac{a^2}{6}(\omega_2 + 2\omega_1)(\omega_2 - \omega_1)^2.$$

Il loro rapporto è

$$\frac{\Omega_2}{\Omega_1} = \frac{2\omega_3 + \omega_1}{\omega_2 + 2\omega_1} = \frac{2\rho_2 + \rho_1}{\rho_2 + 2\rho_1} = \frac{\rho_1 + \frac{2}{3}(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 + \frac{1}{3}(\rho_2 - \rho_1)}.$$