
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ANNIBALE COMESSATTI

**Una questione elementare studiata
con mezzi superiori. Saggio sul
problema delle sezioni di un diedro**

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2,
Vol. 1 (1939), n.3, p. 236-258.

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_3_236_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_3_236_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

SEZIONE STORICO-DIDATTICA

PICCOLE NOTE

**Una questione elementare studiata con mezzi superiori.
Saggio sul problema delle sezioni di un diedro.**

Nota di ANNIBALE COMESSATTI (a Padova) (*).

§ 3. Uniformizzazione simmetrica del problema mediante funzioni ellittiche.

8. *Uniformizzare* un problema, in particolare algebrico, che ammetta infinite soluzioni, significa classificamente esprimerne le incognite come *funzioni uniformi* di un conveniente numero di parametri, per guisa che, al variare di questi entro opportuni domini, quelle espressioni forniscano tutte, e tutte una sola volta, le soluzioni del problema.

Nel nostro caso le soluzioni sono essenzialmente ∞^1 , e, comunque si vogliano scegliere le incognite (ad esempio, come la posizione di partenza consiglia, le *coordinate di giacitura* dei piani che segano nel modo voluto il dato diedro) si ricade, a meno di trasformazioni elementari, sul *problema di uniformizzazione della curva C*. E questo, notoriamente, si risolve con *funzioni ellittiche*.

Per un cultore di geometria algebrica, tale problema, se non è ulteriormente condizionato, non presenta, nel concetto, difficoltà, anzi resta francamente banale. Tutto si riduce, vi dirà quel cultore, a trasformare birazionalmente la quartica *C* nella cubica di WEIERSTRASS, dopo di che dalla classica rappresentazione parametrica di questa mediante le funzioni $\mathcal{P}(u)$, $\mathcal{P}'(u)$ si risale senz'altro a quella di *C*. Ed un cultore più specializzato potrà anche aggiungere che la conoscenza d'una radice ($x = i$) del discriminante $D(x)$ esonera da preoccupazioni circa l'*intervento di irrazionalità* nella trasformazione.

Sembra che la via indicata debba condurre alla soluzione ideale; senonchè, a ragion veduta, se il procedimento non è accertamente

(*) Continuatione e fine, v. num. precedente, pag. 160.

cautelato, si conseguono, per le coordinate x, y del punto di C , espressioni, delle quali una almeno è notevolmente complicata, tali da ripugnare, per dir così, al buon gusto, il quale ha bene i suoi diritti in un problema che non è d'avanguardia.

In omaggio all'invocato buon gusto, e con riguardo alla simmetria dell'equazione di C nelle variabili x, y ci siam proposti di conseguire una *risoluzione simmetrica del problema d'uniformizzazione*, il cui risultato sia quello di *condurre ad espressioni parametriche delle x, y che si mutino una nell'altra per il semplice cambiamento di segno del parametro uniformizzante*.

Un'esigenza più raffinata, domanda, naturalmente, mezzi, più raffinati: occorrerà schierare accanto ai piccoli calibri almeno qualche medio calibro. Ma, in ordine alle finalità informative di quest'articolo (vogliamo dire propagandistiche delle vedute superiori) sarà, forse, il benvenuto; tanto più in quanto — il lettore ne giudichi — il suo intervento non è provocato artificialmente.

Non vogliamo nascondere che la *simmetrizzazione* qui raggiunta è pagata al prezzo d'una certa costante c la quale dipende in maniera *trascendente* dai dati. Tale dipendenza resta però precisata da un'elegante espressione di c mediante un *integrale di LÉGENDRE* nel campo reale, la quale si consegue attraverso un'elaborazione che ci sembra interessante; onde pensiamo che l'acquisto compensi il prezzo.

9. Andiamo al merito.

Intanto il parametro uniformizzante è senz'altro l'*integrale ellittico di prima specie* della C ; il quale però è individuato a meno di due costanti, l'una moltiplicativa, l'altra additiva. La prima è inessenziale e può esser fissata subito senza inconvenienti; la seconda invece, che dipende dall'origine delle integrazioni, interviene essenzialmente nel nostro problema.

Liberiamoci subito dalla prima costante fissando l'espressione del *differenziale ellittico* du , che, per la curva \bar{C} di equazione (2.16) trasformata birazionale di C , ha l'espressione ben nota ⁽¹²⁾

$$(3.1) \quad du = \frac{dx}{w} = \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 1)(x^2 + k^2)}}.$$

⁽¹²⁾ La si può p. es. dedurre dall'espressione generale $\frac{\varphi dx}{f'_v}$ d'un differenziale abeliano di 1^a specie per una curva algebrica $f(v, x) = 0$ (φ polinomio aggiunto d'ordine $n-3$) tenendo conto che, nel caso della curva \bar{C} , $f'_v = 2w$, ed inoltre l'unica aggiunta d'ordine $n-3$ è la retta impropria, talchè φ è una costante.

Poichè la x è la stessa per i punti di C e per i corrispondenti di C , così possiamo, senza trasformazioni di variabili, riferire il differenziale a quest'ultima curva, salvo a precisare, nei suoi punti, l'ambiguità del radicale.

Con riguardo al problema di simmetrizzazione fissiamo ora come *origine delle integrazioni* uno, prescelto a piacere, sia U , fra i quattro punti doppi della g_2^1 , $x' = y$, $y' = x$ di C ⁽¹³⁾; e l'integrale così *normato* s'indicherà con u . Si avverta che se ad U si sostituisce un altro fra i predetti punti doppi, l'integrale u subisce l'incremento d'un semiperiodo.

Notoriamente (teorema d'ABEL) la somma $u' + u$ dei valori di u nei punti d'una coppia della nostra g_2^1 , è congrua (modd. periodi) ad una costante, la quale però nel caso attuale risulta *nulla*, appunto in forza del modo con cui s'è scelta l'origine delle integrazioni. Pertanto in due punti associati dalla g_2^1 l'integrale u assume, a meno di periodi, valori opposti.

La x , funzione razionale del punto di C , è, pure notoriamente, una certa *funzione ellittica* $x = f(u)$ di u ; e se al valore u corrisponde sulla C il punto P , al valore $-u$ corrisponderà, per quanto precede, il punto P' associato nella g_2^1 , talchè per questo si avrà $x' = f(-u)$. Ma la x' di P' non è che la y di P , onde in definitiva per questo punto si ha

$$(3.2) \quad x = f(u), \quad y = f(-u),$$

con che l'uniformizzazione simmetrica è concettualmente raggiunta. Diciamo concettualmente perchè non sappiamo ancor nulla circa la $f(u)$ che passiamo a determinare compiutamente.

10. Partiamo dall'osservare che, sulla C , la x , i cui gruppi di livello variano in una g_2^1 , è funzione razionale *del 2° ordine* coi due zeri nei punti ($x = 0$ $y = \pm m \cdot k$) dove si annulla al finito,

⁽¹³⁾ Le coordinate di quei quattro punti si possono determinare risolvendo l'equazione biquadratica dedotta dalla (2.11) col porre $x = y$. Dopo qualche calcolo si trovano così i quattro valori

$$x = y = \frac{1}{\sin \vartheta} \sqrt{(\cos \vartheta \pm \cos \varphi)(\cos \vartheta \mp 1)}.$$

Analogamente si trova che i punti doppi della g_2^1 generata dalla trasformazione involutoria $x' = -y$, $y' = -x$ hanno le coordinate

$$x = -y = \frac{1}{\sin \vartheta} \sqrt{(\cos \vartheta \pm \cos \varphi)(\cos \vartheta \pm 1)},$$

talchè due di essi (segni superiori) sono sempre reali, e lo sono tutti quattro se $\vartheta > \varphi$.

e coi due poli sovrapposti nel nodo all'infinito sull'asse x . Perciò anche la $f(u)$ è funzione ellittica del 2° ordine, quindi, come andiamo a provare, esprimibile sotto la forma

$$(3.3) \quad f(u) = \rho \frac{\wp(u+c) - m}{\wp(u+c) - n},$$

denotandosi con \wp la funzione di WEIERSTRASS cogli stessi periodi, e con c, ρ, m, n costanti opportune.

Invero la funzione del 2° ordine $\wp(u+c)$, razionale sulla C , ha un polo doppio in $u = -c$, quindi le relative coppie di livello costante son quelle della g_2^1 individuata dal punto doppio $u = -c$ (generata dalla trasformazione $u' = -u - 2c$), che pertanto, al variare di c , descrive la totalità delle g_2^1 esistenti sulla curva; onde l'equazione $\wp(u+c) = m$ è atta a rappresentare qualunque coppia di punti della C . In particolare due coppie di punti della stessa g_2^1 ($x = \text{cost.}$) come quelle degli zeri e dei poli di $f(u)$ si ottengono per lo stesso valore di c e per due valori diversi di m , onde, determinata la c in modo che $u = -c$ sia uno dei punti doppi di quella g_2^1 [ad es. il punto X ($x = i, y = i \cos \varphi$) fissato al n.° 6] ed assunti opportunamente m, n , le due funzioni (ellittiche, o, se si vuole, razionali su C)

$$f(u) \text{ e } \frac{\wp(u+c) - m}{\wp(u+c) - n},$$

hanno gli stessi zeri e poli, quindi differiscono per un fattore costante, il che porge, in definitiva, la (3.3). Cambiando u in $-u$, e tenendo conto della parità della \wp , la nostra rappresentazione parametrica (3.2) si precisa provvisoriamente nella

$$(3.4) \quad \begin{cases} x = \rho \frac{\wp(u+c) - m}{\wp(u+c) - n} \\ y = \rho \frac{\wp(u-c) - m}{\wp(u-c) - n} \end{cases}$$

dove restano incognite le quattro costanti c, ρ, m, n ed i due invarianti g_2, g_3 della \wp .

Notiamo, prima di procedere alla determinazione delle sei costanti, che se al punto X si sostituisce un altro fra i punti doppi della g_2^1 , $x = \text{cost.}$, o se un analogo cambiamento si eseguisce sull'origine delle integrazioni U , la costante c varia per l'incremento d'un semiperiodo s , ma la rappresentazione (3.4) e le rimanenti costanti non mutano.

Ciò si conferma nel modo più semplice, osservando, che se si pone $c_1 = c + s$, ed $u_1 = u + s$, agli argomenti $u + c$ ed $u - c$ si

possono sostituire, a meno di periodi, gli argomenti $u_1 + c_1$ ed $u_1 - c_1$, con che muta soltanto, per l'incremento del semiperiodo s , l'associazione fra i punti di C ed il valore del parametro ellittico u . Pertanto l'indeterminazione additiva d'un semiperiodo nel valore della costante c è affatto inessenziale.

11. Lasciando per il momento sospeso il problema concernente la c , vediamo come i valori delle altre cinque costanti si conseguano, per dir così, in un colpo di mano.

Posto $v = u + c$, indi $z = \wp(v)$ sarà notoriamente

$$(3.5) \quad du = dv = \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}}$$

ed inoltre, per la prima delle (3.4)

$$(3.6) \quad x = \wp \frac{z - m}{z - n}$$

talchè la sostituzione lineare (3.6) trasforma il differenziale ellittico (3.1) alla forma normale di WEIERSTRASS (3.5).

L'integrale v ha l'origine delle integrazioni in $u = -c$, cioè, sulla C , nel punto X di coordinata $x = i$, mentre sulla cubica $v^2 = 4z^3 - g_2z - g_3$ (trasformata birazionale di C) quell'origine è nel flesso improprio $z = \infty$. Tanto val dire (e poteva vedersi direttamente sulle (3.4)) che i due valori ($x = i$, $z = \infty$) sono associati dalla sostituzione (3.6), dal che consegue che

$$(3.7) \quad \wp = i.$$

Se ora si effettua materialmente sul differenziale (3.1) la sostituzione (3.6), si ottiene, con calcoli elementari, un differenziale del tipo $\frac{dz}{\sqrt{P(z)}}$, dove $P(z)$ è un polinomio di terzo grado; l'abbassamento del grado essendo da imputarsi alla circostanza che, per effetto della trasformazione operata, la radice $x = i$ del polinomio $(x^2 + 1)(x^2 + k^2) = (x - i)(x + i)(x - ik)(x + ik)$ si è portata in $z = \infty$. Le altre tre radici di $P(z)$ sono senz'altro le trasformate di $x = -i$, ik , $-ik$ mediante la sostituzione (3.6).

Ora non resta che identificare $P(z)$ col polinomio normale della (3.5): e ciò importa due condizioni, l'una esprime che il coefficiente di z^3 in $P(z)$ è eguale a 4, l'altra che la somma delle radici di $P(z)$ è nulla. In definitiva si ottengono due semplici equazioni lineari in m , n , dalle quali si traggono per quelle costanti i valori

$$(3.8) \quad m = \frac{1}{12}(1 - 5k^2), \quad n = \frac{1}{12}(k^2 - 5),$$

dopo di che, completando l'identificazione, risulta

$$(3.9) \quad \begin{cases} g_2 = \frac{1}{12} \{ 12k^2 - (k^2 + 1)^2 \} \\ g_3 = \frac{1}{216} \{ 36k^2 - (k^2 + 1)^2 \} (k^2 + 1) \quad (14). \end{cases}$$

12. Andiamo infine ad occuparci della costante c ; questa, come già avvertito, dipende in maniera trascendente dai dati, onde saremo paghi di assegnarne un'espressione elegante, e di aver argomento per un'istruttiva digressione sui *periodi dell'integrale ellittico reale* u .

A tenore della nostra impostazione ($u \equiv 0$ in U , $u \equiv -c$ in X) la costante c è (a meno di periodi) il valore del nostro integrale dal punto X al punto U . Un tale punto di partenza, attese le complesse espressioni delle coordinate di U (nota ⁽¹³⁾), non consente un'elaborazione semplice, e noi lo abbandoneremo.

Partiremo invece dall'osservare che nel punto $Y(x = i \cos \varphi, y = i)$ omologo di $X(x = i, y = \cos \varphi)$ nella trasformazione di prima specie $u' \equiv -u$ ($x' = y, y' = x$), l'integrale u ha il valore c , talchè risulta (a meno di periodi)

$$(3.10) \quad 2c = \int_X^Y du.$$

restandone determinata la c a meno di semiperiodi, che, come si è già avvertito, sono inessenziali.

L'indeterminazione si può eliminare, fissando, sulla riemanniana relativa a C , il cammino d'integrazione fra X ed Y , il che andiamo a fare, con riferimento alle figure 4, 5, che, per comodità del lettore, abbiám riprodotte poco appresso.

Il punto X ha, sull'asse immaginario x_2 , la posizione delle figure, ed è un punto di diramazione comune ai due fogli; l'immagine di Y , a motivo di $x = i \cos \varphi$, cade anch'essa sul semiasse immaginario positivo ed al disotto di X . Andiamo a mostrare, che, in ciascuno dei due casi [$k^2 > 0$ ($\varpi > \varphi$), $k^2 < 0$ ($\varpi < \varphi$)] ai quali si

(14) Agli stessi risultati si perviene, come il lettore potrà verificare, mediante il procedimento classico di trasformazione esposto nel trattato di BIANCHI, *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche* [Pisa, Spoerri (1901)] § 124, una volta fissata la scelta $x = i$ della radice del polinomio $(x^2 + 1)(x^2 + k^2)$ dalla quale dipende razionalmente la trasformazione.

risferiscono le due figure, nel segmento XY dell'asse immaginario, il differenziale $du = \frac{dx}{w}$ è sempre *reale*, s'intende quando l'incremento dx sia preso lungo quell'asse, talchè w è immaginario puro, $w = iw'$, restando i due fogli distinti dal segno di w . Poichè, come mostra un facile calcolo, nel punto Y w' è negativo ⁽¹⁵⁾, così quale cammino d'integrazione sceglieremo il segmento XY tracciato sul *foglio negativo* della riemanniana; in ogni caso il nostro calcolo fornirà per c un valore reale.

Nell'occasione in cui andiamo a confermare le precedenti asserzioni, vogliamo anche tener presente che il valore del nostro integrale calcolato lungo un cammino collegante comunque due fra i quattro punti di diramazione X, X_1, K, K_1 è un *semiperiodo*. Ciò in vista di osservazioni non strettamente legate all'attuale problema, ma confacenti al tema generale.

Introduciamo ancora, per le opportunità del caso, l'espressione

$$(3.11) \quad du = \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(\xi^2-k^2)}}$$

del nostro differenziale, che si deduce dalla (3.1) colla trasformazione $x = i\xi$, e che ci sarà utile sull'asse immaginario, dove ξ è reale.

13. Distinguiamo, come al n.º 7, i due casi tipici:

I. $k^2 > 0$ ($\varphi > \varphi$) (Fig. 4). Nel segmento XK (e nel simmetrico X_1K_1) il radicando $(1-\xi^2)(\xi^2-k^2)$ della (3.11) è positivo, mentre è negativo nel segmento KK_1 . Segue che i due semiperiodi (*primitivi*, com'è facile verificare)

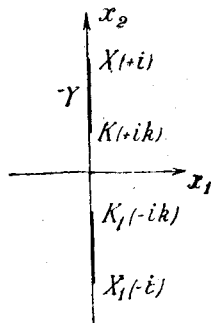


Fig. 4

$$\int_{\dot{X}}^K du, \quad \int_{K_1}^{\dot{X}} du,$$

calcolati, non importa su qual foglio, lungo l'asse immaginario, sono l'uno reale l'altro immaginario puro. Salvo alterare u per un fattore reale, si perviene così ad una matrice di periodi primitivi del tipo $|1, i\tau|$, potendosi anche

⁽¹⁵⁾ Dalla (2.17) per $x = i \cos \varphi$, $y = i$ si trae

$$w = i \frac{\cos \varphi - 1}{\sin \varphi \cos \varphi}, \quad \text{quindi} \quad w' = \frac{\cos \varphi - 1}{\sin \varphi \cos \varphi} < 0.$$

supporre $\tau > 0$. È la matrice normale tipica per le curve ellittiche reali di carattere reale zero (due rami) ⁽¹⁶⁾.

Confermiamo che nel segmento XY il radicale è sempre reale, mostrando che l'immagine di Y cade nel segmento XK , ed infine (avendosi in Y , $x = i \cos \varphi$, quindi $\xi = \cos \varphi$) che $\cos \varphi > k$. Ciò consegue subito dall'ipotesi ($k^2 > 0$) di questo caso, appena si ricordi che $k^2 = 1 - \frac{\sin^2 \varphi}{\sin^2 \frac{\pi}{2}}$, e che (escludendosi il valore $\frac{\pi}{2}$) $\sin^2 \varphi < 1$, donde si ricava $k^2 < 1 - \sin^2 \varphi$, ecc.

II. $k^2 < 0$ ($\frac{\pi}{2} < \varphi$) (Fig. 5). Una semplice ispezione delle espressioni (3.1), (3.11) del nostro du (ricordandosi dal n.º 7 che $k^2 = -h^2$ con h reale) mostra che i due semiperiodi

$$\int_X^{X_1} du = 2 \int_X^0 du, \quad \int_{K_1}^K du = 2 \int_0^K du,$$

(O , origine degli assi) sono, il primo reale, il secondo immaginario puro. Però essi *non sono primitivi*; e per raggiungere tal condizione basta sostituire al secondo il valore dell'integrale dal punto X al punto K che calcoleremo lungo la spezzata XOK sullo stesso foglio del primo. Così se vogliamo indicare il valore di questo con $\frac{r}{2}$ (r reale) ot-

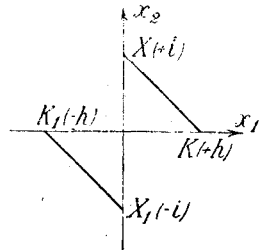


Fig. 5

terremo per il secondo un valore del tipo $\frac{r}{4} + i \frac{s}{2}$ (s reale), ed infine per l'integrale reale $\frac{1}{r} u$ la matrice normale $\left| 1, \frac{1}{2} + ir \right|$ tipica per le curve ellittiche reali di carattere reale uno (un ramo).

14. Ritorniamo definitivamente alla nostra c . Assunta, nel segmento XY , per du l'espressione (3.11), ed avuto presente che l'integrazione va eseguita sul foglio dove il radicale è negativo, l'espressione (3.10) si precisa nella

$$(3.12) \quad 2c = - \int_1^{\cos \varphi} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(\xi^2-k^2)}},$$

dove adesso l'integrazione va eseguita nel campo reale e per il valore positivo del radicale.

⁽¹⁶⁾ Vedasi la mia Nota: *Sulle curve ellittiche reali* [questo « Bollettino », V (1926), pp. 69-75, n.º 1], ed eventualmente le ricerche precedenti, più generali, ivi richiamate.

Dopo il cambiamento di variabile $\xi = \cos \tau$, il nostro integrale diviene

$$(3.13) \quad 2c = \int_0^{\varphi} \frac{d\tau}{\sqrt{\cos^2 \tau - k^2}},$$

indi, tenuto conto dell'espressione (2.15) di k^2 , si riconduce facilmente alla forma che terremo per definitiva

$$(3.14) \quad 2c = \lambda \int_0^{\varphi} \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \tau}},$$

di un *integrale ellittico di prima specie del* LÉGENDRÉ ⁽¹⁷⁾ (salvo il fattore λ) col *modulo*

$$(3.15) \quad \lambda = \frac{\sin \varkappa}{\sin \varphi}.$$

15. Andiamo a raccogliere le conclusioni.

Sia premesso, ai fini d'una prossima opportunità formale, che, siccome la nostra C ammette la simmetria centrale $x' = -x$, $y' = -y$, così un cambiamento simultaneo di segno dei secondi membri nelle (3.4) non invalida quella rappresentazione parametrica, ma altera soltanto l'associazione fra i punti di C ed i valori del parametro u . E si può subito precisare che tale alterazione consiste nell'incremento (dei valori di u primitivamente associati ai punti di C) d'un certo semiperiodo s , appena si ricordi che, sulla C , quella simmetria è una *trasformazione di 2^a specie involutoria* (nota ⁽¹¹⁾) quindi si rappresenta mediante una congruenza del tipo $u' \equiv u + s$ (modd. periodi), talchè per i valori u , $u + s$ del parametro i secondi membri delle (3.4) assumono valori opposti.

È poi evidente che la *rappresentazione parametrica dell'involuppo* Γ si ha senz'altro dalle (3.4) scrivendo nei primi membri le coordinate plückeriane u, v al posto delle x, y . L'inconveniente che la lettera u vi comparisca con due diversi significati non avrà seguito, perchè l'impiego di quella rappresentazione è affatto transitorio.

Riprendiamo ora dal n.º 1 la considerazione del sistema ∞^2, Σ , dei piani $Ux + Vy + Wz + 1 = 0$ che tagliano il nostro diedro nel modo voluto. Per ciascuna delle ∞^1 giaciture appartenenti a Σ le U, V, W possono interpretarsi quali coordinate omogenee

(17) Cfr. BIANCHI, loc. cit. ⁽¹⁴⁾, § 145.

(quindi $\frac{U}{W}$, $\frac{V}{W}$ quali coordinate non omogenee) della giacitura stessa, e siccome il piano di un'assegnata giacitura che passa per $S(0, 0, 1)$ ha un'equazione che può scriversi $Ux + Vy + Wz - W = 0$, quindi taglia il piano π (piano x, y) nella retta $Ux + Vy - W = 0$, di coordinate plückeriane $u = -\frac{U}{W}$, $v = -\frac{V}{W}$, così sostituendo alle u, v , nella rappresentazione parametrica di Γ , le espressioni ora trovate, e tenendo conto dell'osservazione premessa circa l'inessenzialità del cambiamento di segno dei secondi membri, perveniamo all'enunciato definitivo:

Le coordinate di giacitura $\frac{U}{W}$, $\frac{V}{W}$ (nel riferimento precisato) dei piani che tagliano un dato diedro, di misura φ , secondo un angolo assegnato z , si esprimono parametricamente colle formole

$$\begin{cases} \frac{U}{W} = i \frac{12\wp(u+c) + 5k^2 - 1}{12\wp(u+c) + 5 - k^2}, \\ \frac{V}{W} = i \frac{12\wp(u-c) + 5k^2 - 1}{12\wp(u-c) + 5 - k^2}, \end{cases}$$

dove

$$k^2 = 1 - \frac{\sin^2 \varphi}{\sin^2 z},$$

$\wp(u)$ è la funzione ellittica di WEIERSTRASS cogli invarianti

$$\begin{cases} g_2 = \frac{1}{12} \{ 12k^2 - (k^2 + 1)^2 \}, \\ g_3 = \frac{1}{216} \{ (k^2 + 1) \{ 36k^2 - (k^2 + 1)^2 \}, \end{cases}$$

e c è una costante reale espressa dall'integrale di LEGENDRE

$$c = \frac{\lambda}{2} \int_0^z \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \tau}}, \quad \text{con } \lambda = \frac{\sin z}{\sin \varphi},$$

calcolato nel campo reale, cioè lungo l'asse reale τ .

OSSERVAZIONE 1.^a — La costante c dipende da z solo per il tramite di λ ; fissata questa costante, con che lo è anche k^2 , quindi tutte le altre costanti della rappresentazione, e la \wp, φ è tuttavia suscettibile di infiniti valori (può addirittura variare tra 0 e $\frac{\pi}{2}$ se si sceglie $\lambda < 1$) e di conseguenza lo è anche c . Ciò mostra che

questa costante non può essere più compiutamente determinata in funzione delle altre costanti (k^2 , g_2 , g_3) della rappresentazione parametrica.

OSSERVAZIONE 2.^a — In possesso delle espressioni di g_2 , g_3 , nasce la curiosità di indagare in quali casi (cioè al seguito di quali vincoli tra gli angoli φ e \varkappa) il nostro problema ellittico divenga armonico ($g_3 = 0$) od equianarmonico ($g_2 = 0$). Si noterà che tanto vale esprimere che la quaderna di diramazione $(x^2 + 1)(x^2 + k^2) = 0$ della retta doppia C è risp. armonica od equianarmonica, e siccome il birapporto delle radici di quella quaderna (nell'ordine $+i$, $-i$, $+ik$, $-ik$) è $\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2$ così il primo caso si dovrà presentare per i valori -1 , $\frac{1}{2}$, 2 di quel birapporto, ed il secondo per i valori $-\varepsilon$, $-\varepsilon^2$ (ε radice cubica immaginaria dell'unità); ed effettivamente un facile calcolo conferma l'identità delle due posizioni.

Immediatamente apprezzabile è la particolarità (armonica) del caso $k^2 = -1$, che si concreta nella relazione

$$\sin \varphi = \sqrt{2} \sin \varkappa,$$

di facile interpretazione costruttiva, della quale, come soluzioni più semplici, si segnalano quelle offerte dai valori $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right)$ dei nostri due angoli. Al lettore la cura di un'indagine più particolareggiata.

§ 4. Approfondimento dei problemi di realtà.

16. Rivolghiamoci infine a considerare più da vicino l'aspetto grafico del nostro problema (¹⁸).

L'attenzione si concentra sulla forma della curva L , di 8° ordine, inviluppata, sul piano xy , dalle tracce dei piani della stella S che producono nel nostro diedro la sezione domandata (cioè sul luogo aderente all'inviluppo Γ). Sappiamo che L può avere uno o due rami; qui ci proponiamo di studiarne l'andamento, e, ad un tempo, come il problema richiede, di precisare la natura e la distribuzione delle *singolarità reali* della curva.

Diciamo subito che *non scriveremo l'equazione della L*. Il problema è elementare, una volta che conosciamo l'equazione del-

(¹⁸) Il lettore vedrà fino a che punto l'abbiamo sviscerato, e quali siano le questioni, che (per ragioni di brevità o di complessità) abbiamo lasciate sospese

l'inviluppo aderente Γ ; ma di forte complicazione formale, e per tal ragione l'abbiamo abbandonato. Si può procedere facendo appello ad altre risorse, e la discussione ne risulta forse più istruttiva, ed in taluni punti più elegante.

Prenderemo le mosse dalla *relazione fondamentale* di KLEIN

$$n + i' + 2\tau'' = m + k' + 2d''.$$

fra le singularità reali d'una curva algebrica piana reale ⁽¹⁹⁾, ricordando che in essa n , m indicano, al solito, l'ordine e la classe, i' , k' i numeri dei flessi e delle cuspidi reali, τ'' quello delle bitangenti reali *isolate*, d'' quello dei punti doppi reali *isolati*.

Per la nostra L (si riveda la (4.1)) è $n=8$, $m=4$, $i=0$, quindi $i'=0$, ed inoltre anche $\tau''=0$ perchè L ammette due sole bitangenti (gli assi coordinati) reali, a contatti reali. Resta pertanto

$$(4.1) \quad k' + 2d'' = 4.$$

Poichè L ammette le simmetrie ortogonali rispetto alle bisettrici degli assi (e il loro prodotto ch'è la simmetria centrale rispetto all'origine) così, assieme ad un punto doppio isolato P , se ne presentano altri tre della stessa natura, in tutto quattro, che possono ridursi a due se P giace su una delle predette bisettrici, ma mai ad uno solo perchè L non passa per l'origine ⁽²⁰⁾.

Dunque d'' è pari, e, per la (4.1), ≤ 2 ; e pertanto si presentano a priori come possibili i due casi $d''=0$ (*quattro cuspidi reali*) e $d''=2$ (*nessuna cuspidi reale*). Andiamo a confermare che i casi avvisati sono effettivi e rispondono alle due alternative fondamentali ($\varphi \geq 2$) del problema.

17. La via che a posteriori si rivela più opportuna, e che, al seguito d'un'impostazione (ci sia concesso di dirlo) indovinata, dà il massimo rendimento, è addirittura quella totalitaria che avvisa alla *determinazione degli otto punti doppi della curva L*. Le simmetrie ammesse da quella curva fanno prevedere che, come la discussione confermerà, in effetto ci si trova ricondotti a problemi quadratici, sulla realtà delle cui soluzioni si discute addirittura *razionalmente*.

Tratteremo il problema sul caso duale proponendoci di determinare le *otto bitangenti* della C [rappresentata dall'equazione (2.12)].

⁽¹⁹⁾ F. KLEIN, *Eine neue Relation zwischen den Singularitäten einer algebraischen Curve* [*Math. Ann.*, X (1876), pp. 199-209], pag. 200.

⁽²⁰⁾ Ciò si vede subito sul caso duale: la retta impropria non è tangente alla quartica C , in quanto le intersezioni relative sono assorbite dai due nodi nei punti impropri degli assi.

Introdotte le notazioni abbreviative

$$(4.2) \quad A \equiv x^2 + y^2 - 2xy \cos \varphi + \sin^2 \varphi, \quad B \equiv m(xy + \cos \varphi),$$

scriviamo anzitutto la (2.12) sotto la forma

$$(4.3) \quad A - B^2 = 0.$$

Sia poi $y = \mu x + \nu$ l'equazione d'una retta r ; indicando con \bar{A} , \bar{B} i polinomi in x dedotti da A , B colla posizione $y = \mu x + \nu$, l'equazione di 4° grado in x

$$(4.4) \quad \bar{A} - \bar{B}^2 = 0,$$

avrà per radici le ascisse delle quattro intersezioni di r con C . Pertanto, se r è bitangente, il primo membro della (4.4) sarà un quadrato perfetto, onde si potrà scrivere

$$\bar{A} - \bar{B}^2 = -\bar{C}^2,$$

essendo C un polinomio di 2° grado in x , e non di grado inferiore, perchè la curva C non ammette bitangenti a contatto improprio (2¹); ed ancora

$$(4.5) \quad \bar{A} \equiv (\bar{B} + \bar{C})(\bar{B} - \bar{C}).$$

Il primo membro è di 2° grado (al più) ed i due fattori del 2° non possono essere entrambi di 1° grado se no lo sarebbero \bar{B} e \bar{C} ; dunque uno di essi, e, senza essenziali restrizioni si può supporre sia il secondo, sarà una costante t , onde risulterà

$$\bar{B} \equiv \bar{C} + t,$$

e, sostituendo in (4.5)

$$\bar{A} + t(2\bar{B} + t) \equiv 0.$$

Ciò viene a dire che l'equazione di secondo grado (in x , y)

$$(4.6) \quad A + t(2B + t) = 0,$$

è soddisfatta *identicamente*, ponendo $y = \mu x + \nu$, quindi rappresenta una *conica γ degenera* della quale la retta r è una componente.

Il ragionamento s'inverte subito, e porta a concludere che *le bitangenti cercate s'identificano colle rette componenti le coniche degeneri del sistema ∞^1 (4.6)*; talchè quel sistema (ch'è d'indice 2) dovrà ammettere 4 coniche degeneri, come andiamo a confermare.

(2¹) Le tangenti di C a contatto improprio sono quelle nei due nodi, segnalate al n.° 6, e non possono evidentemente essere bitangenti.

18. L'equazione (4.6) della conica (variabile) γ si scrive per disteso

$$(4.7) \quad x^2 + y^2 - 2xy(\cos \varphi - mt) + t^2 + 2mt \cos \varphi + \sin^2 \varphi = 0,$$

e poichè non vi figurano termini di primo grado, così la condizione di spezzamento, si scinde (colle notazioni classiche) nelle due seguenti, compendiate dalla $A = a_{33}A_{33} = 0$:

a) $A_{33} = 0$. Allora il trinomio di 2° grado della (4.7) è un quadrato perfetto, e la conica si spezza in due rette parallele:

b) $a_{33} = 0$. L'equazione resta omogenea e quindi si ha lo spezzamento in due rette per l'origine.

Approfondiamo separatamente i due casi:

a) La condizione $A_{33} = 0$ porge subito per t i due valori

$$t = \frac{\cos \varphi \pm 1}{m},$$

indi, dopo facili calcoli, le due coppie di rette

$$(4.8) \quad \begin{cases} x + y = \pm i \frac{\cos \varphi + 1}{\sin \varphi} \\ x - y = \pm i \frac{\cos \varphi - 1}{\sin \varphi}, \end{cases}$$

per ciascuna coppia *immaginarie coniugate* e parallele ad una delle bisettrici degli assi.

b) La condizione $a_{33} = 0$, cioè

$$t^2 + 2mt \cos \varphi + \sin^2 \varphi = 0,$$

porge

$$t = -m(\cos \varphi \pm k).$$

indicandosi con k uno dei due valori della $\sqrt{k^2}$ (se $k^2 > 0$ quello positivo) e conduce alle due coniche degeneri

$$(4.9) \quad x^2 + y^2 - 2xy \left\{ \frac{\cos \varphi}{\cos^2 \varphi} \pm m^2 k \right\} = 0,$$

che forniscono le altre quattro bitangenti passanti per l'origine.

La discussione circa la loro realtà richiama l'intervento della nostra alternativa fondamentale.

b₁) $k^2 < 0$ ($\varphi > \varpi$). Allora k è immaginario e quindi lo sono le quattro bitangenti: la coppia che forma una delle due coniche è coniugata di quella che forma le altre due. Ritornando al problema originario si ha dunque in questo caso $d'' = 0$ e k (che ora indica il numero delle cuspidi) = 4.

$b_2) k^2 > 0$ ($\varphi < \pi$). Andiamo a vedere che le quattro bitangenti (4.9) sono reali, ma la cosa non è proprio immediata.

In questo caso è k reale positivo (< 1) e si tratta di far vedere che è pur positivo, in ogni caso, il discriminante della (4.9)

$$(4.10) \quad \left(\frac{\cos \varphi}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} \pm m^2 k \right)^2 - 1.$$

La conclusione è immediata quando si prende il segno superiore, giacchè m^2, k sono positivi ed inoltre $\frac{\cos \varphi}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} > 1$.

Nel caso del segno inferiore basterà provare che è positivo il secondo fattore del prodotto

$$\left(\frac{\cos \varphi}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} + 1 - m^2 k \right) \left(\frac{\cos \varphi}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} - 1 - m^2 k \right),$$

in cui si decompone il nostro discriminante, giacchè ne seguirà « a fortiori » che lo è anche il primo.

Si consegue il risultato ricorrendo all'artificio di moltiplicare quel secondo fattore, per il fattore *positivo* che se ne deduce cambiando il segno di $m^2 k$, con che si è ricondotti a provare la disequaglianza

$$\left(\frac{\cos \varphi}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} - 1 \right)^2 - m^4 k^2 > 0,$$

la cui verità risulta da ciò che il suo primo membro è un quadrato perfetto e precisamente vale

$$m^4 \cos^2 \frac{\varphi}{2} (1 - \cos \varphi)^2.$$

Al lettore i dettagli del calcolo.

19. La conclusione raggiunta nel caso b_2) ultimamente trattato, non basta ancora ai nostri scopi: resta da provare che delle quattro bitangenti reali uscenti dall'origine due sono a contatti reali, e due isolate, talchè è verificata la seconda alternativa prevista alla fine del n.º 16.

Intanto, a tenore delle osservazioni di quel n.º sul caso duale, le bitangenti di ciascun tipo sono in numero pari, e non ve ne possono essere quattro isolate: resta dunque da escludere che le quattro bitangenti in discorso siano tutte a contatti reali, mentre tal comportamento si verifica certamente per due di esse.

Partiamo dall'osservare che i due rami C_1, C_2 , della nostra C , sono trasformati l'uno nell'altro dalla simmetria rispetto all'origine, giacchè i due punti simmetrici $x=0, y=\pm mk$ (i valori di y si traggono subito dalle (2.16) (2.17) di C) stanno su rami

distinti, come si apprende dalla localizzazione di quei rami sulla riemanniana, precisata al n.º 7, I. Tenendo presente che ciascuno dei nodi impropri della C è mutato in sè da quella simmetria, ne deduciamo che in esso s'incrociano due rami distinti.

Ora siano m, n due bitangenti a contatti reali uscenti da O, P un punto del ramo C_1 , ω quello dei due angoli completi \widehat{mn} che contiene P . Muovendosi P lungo il ramo C_1 , le m, n non si possono mai attraversare, perchè ciascun incontro è un contatto; quindi C_1 sta tutto entro l'angolo ω , e con esso i due nodi di C (cogli assi x, y a cui appartengono) ed infine l'altro ramo C_2 , in quanto, passando per i nodi, ha punti interni ad ω . In definitiva tutta la C è contenuta in ω .

Se vi fosse un'altra bitangente b , a contatti reali, uscente da O , essa dovrebbe dunque appartenere ad ω ; ma ciò è assurdo, in quanto C non potrebbe attraversare b , mentre ciascuno dei suoi rami (che scorre in ω) tocca entrambe le rette m, n in forza di ciò che i due contatti di C su m (e su n) sono simmetrici rispetto ad O e quindi appartengono a rami distinti.

Se a questo punto si ricorda (nota ⁽¹³⁾) che la bisettrice $x = -y$ dell'angolo ottuso degli assi incontra C in quattro punti reali e quindi è interna ad ω , e si tengono presenti le simmetrie del caso, si conclude colla situazione rappresentata dalla Fig. 6, nelle quale si sono indicate con m_1, n_1 le altre due bitangenti reali (isolate) uscenti da O . Dopo ciò non resta che ritornare per dualità (con riguardo alle precisazioni del n.º 6) al punto di vista primitivo, per concludere che:

Gli otto punti doppi della curva L involupata dalle tracce dei piani del problema si distribuiscono in due quaderne.

I punti della prima quaderna cadono sulle bisettrici degli assi, e sono, su ciascuna, simmetrici rispetto all'origine ed immaginari coniugati.

Per i punti della seconda, che sono impropri, ha luogo la distinzione seguente:

1) ($\varkappa > \varphi$). I quattro punti sono immaginari: la curva L è tutta al finito ed ha quattro cuspidi reali.

2) ($\varkappa > \varphi$). I quattro punti sono reali, due, M, N nodali e gli altri due M_1, N_1 , isolati. I primi cadono nell'angolo ottuso degli assi ed in ciascuno di essi s'incrociano due rami distinti di L ; i secondi cadono in quello tra i due segmenti MN che non contiene i punti impropri degli assi. I punti impropri delle tangenti reali

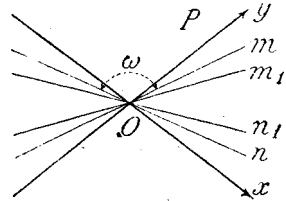


Fig. 6

ad L riempiono il segmento complementare, e per ciascun punto di esso passano quattro tangenti reali. I due contatti di L con ciascun asse appartengono a rami distinti. La curva non ha cuspidi reali.

20. Riconosciuta la natura ed il comportamento delle singolarità reali, ci affideremo per il seguito ad un'ispezione più minuta ed adeguatamente organizzata della corrispondenza (2.2) fra gli assi x, y colla quale può generarsi l'involuppo Γ .

Poichè una retta di coordinate plückeriane u, v taglia gli assi in due punti X, Y di ascissa $x = -\frac{1}{u}$, ($y = 0$); $y = -\frac{1}{v}$, ($x = 0$) così l'equazione di quella corrispondenza deriva senz'altro dalla (2.5) sostituendo $-\frac{1}{x}$, $-\frac{1}{y}$ al posto di u, v , con che si ottiene

$$(4.11) \quad f(xy) \equiv (x^2 + 1)(y^2 + 1) \cos^2 \varphi - (1 + xy \cos \varphi)^2 = 0.$$

Atteso che, tanto vale cambiare nella (2.13) x ed y in $-\frac{1}{x}$, $-\frac{1}{y}$, e poi ridurre a forma intera, è ovvio che il discriminante della (4.11) considerata come equazione in y si ottiene dal $D(x)$ [formula (2.14)] cambiando x in $-\frac{1}{x}$ e poi moltiplicando per x^4 , onde ha l'espressione

$$(4.12) \quad \Delta(x) \equiv m^2(1 + x^2)(1 + k^2x^2).$$

Premesso ciò procediamo alla nostra ispezione.

Si conferma intanto che le ascisse dei contatti T_x, T_{-x}, T_y, T_{-y} (cfr. Fig. 7) di L cogli assi, hanno i valori $\pm m$ già segnalati al n.º 5, Oss. c). Ricordando che, ad es. T_y, T_{-y} sono gli omologhi dell'origine pensata sull'asse x , basta porre nella (4.11) $x = 0$, e si trova appunto $y = \pm m$.

Muovendosi il punto su L a partire dal contatto T_y nel verso indotto sulla curva dal verso positivo dell'asse y , i due punti d'incontro della tangente cogli assi corrispondono ad incrementi dx, dy dei quali il secondo è positivo, ed il primo è positivo o negativo a seconda che la curva volge la sua concavità all'angolo ottuso o all'angolo acuto. Si verifica il primo caso perchè si ha

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{f'_x(0, m)}{f'_y(0, m)} = \frac{\cos \varphi}{\cos^2 \varphi} > 0.$$

Andiamo ora a ricercare se la nostra curva, all'infuori dei contatti, possa incontrare gli assi in punti reali. Essi potranno essere al più due, perchè già sappiamo (nota (8)) che L taglia

ciascun asse nei punti immaginari di ascissa $\pm i$ per i quali passa la conica assoluto K .

Per ogni punto S dell'asse x passano due tangenti a Γ (oltre alla bitangente x) e son le rette che congiungono S ai suoi due corrispondenti S' , S'' sull'asse y . Se in S , L attraversa x , quelle due tangenti, e quindi i punti S' , S'' devono coincidere; e pertanto le ascisse dei punti S cercati (sull'asse x) sono le radici del discriminante $\Delta(x)$. Due di esse hanno in ogni caso i valori $\pm i$, e ciò conferma l'osservazione del precedente capoverso.

Quando $\varphi < \varkappa$, quindi $k^2 > 0$ anche le altre due radici sono immaginarie; L non attraversa gli assi, e quindi giace per intero (con entrambi i suoi rami) entro l'angolo ottuso da essi formato.

Invece, quando $\varphi > \varkappa$ ($k^2 < 0$) quelle due radici $x^2 = -\frac{1}{k^2}$ sono reali, e quindi individuano due punti S_x , S_{-x} nei quali L attra-

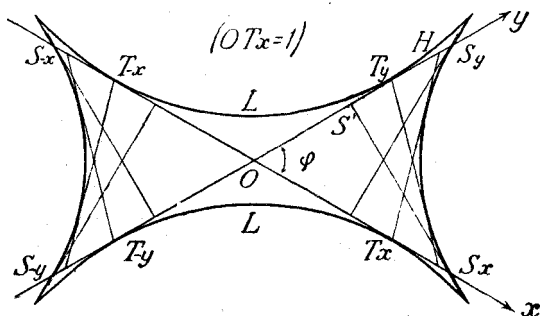


Fig. 7

versa l'asse x . Analogamente si ottengono sull'asse y i due punti S_y , S_{-y} (Fig. 7).

I quattro punti trovati stanno, su ciascun asse, al di là dei contatti, perchè, come mostra una facile verifica, $-\frac{1}{k^2} < m^2$, quindi $OS_x > OT_x$.

Inoltre, come si trae pure facilmente dalla (4.11), (tenendo conto del valore di x , e di $\Delta(x) = 0$) l'ascissa $y = OS'$ del punto dove coincidono i due corrispondenti di S_x vale $x \cos \varphi$, talchè $OS' = OS_x \cdot \cos \varphi$. Dunque la tangente ad L in S_x è perpendicolare all'asse y .

Tale proprietà riceve, attraverso all'interpretazione non euclidea, un'elegante conferma. Basta aver presente che il circolo non euclideo di centro S_x e raggio \varkappa (cfr. n. 5) deve toccare la y in S' (perchè $S' = S''$), indi osservare che la perpendicolarità non euclidea

tra il raggio $S_x S'$ e la tangente y , si conserva tale anche nella metrica euclidea, atteso che il polo di y rispetto all'assoluto K (per il quale passano tutte le perpendicolari non euclidee ad y) è il punto improprio del diametro coniugato, ad esso perpendicolare (in entrambe le accezioni metriche).

Quando S , movendosi nel verso positivo dell'asse x , oltrepassa la posizione S_x , la sua distanza non euclidea dell'asse y diviene $> z$, e quindi divengono immaginari i due punti S' , S'' ($\Delta(x) < 0$) e con essi le due tangenti SS' , SS'' . Ciò viene a dire che in S_x la curva L volge la sua concavità al verso positivo dell'asse x .

Val la pena di notare ancora, che, quando S cade in T_x , uno dei due punti S' , S'' coincide con O , mentre l'altro è un certo punto H dell'asse y avente, come O , da T_x la distanza non euclidea z ; talchè il triangolo OHT_x è, in senso non euclideo, isoscele.

A questo punto, venuti in possesso di elementi sufficienti a giustificare il tracciato della Fig. 7 (relativa ai valori $\varphi = \frac{\pi}{3}$, $z = \frac{\pi}{4}$) arresteremo la nostra analisi del caso $z < \varphi$. A proposito di quel tracciato il lettore avvertirà che, movendosi lungo L , il senso della convessità non può invertirsi che nel passaggio attraverso ad una cuspide, visto che L non ha flessi reali ⁽²²⁾.

La figura mostra che la curva divide il piano in due regioni, diciamole *interna* ed *esterna*, dai punti delle quali escono rispettivamente 4 e 2 tangenti reali. Avvertasi in proposito che, stante l'assenza di flessi reali, il numero delle tangenti reali uscenti da un punto P non può variare altro che quando P attraversa L .

Ritornando, per proiezione da S , all'« aspetto A » della questione, si apprende così che il problema (di 4° grado) di condurre per una retta della stella S i piani che segano nel modo voluto il dato diedro, ammette sempre, per $z < \varphi$, due soluzioni reali ⁽²³⁾.

⁽²²⁾ La posizione delle quattro cuspidi reali, e delle relative tangenti, non è stata più precisamente determinata. Il problema non offre difficoltà d'impostazione (e si può impostare in più modi): ma l'elaborazione resta formalmente complessa. Una certa complessità è d'altronde insita nel problema stesso, che, tenuto conto delle simmetrie di L , si riduce essenzialmente dal 12° al 3° grado. Al lettore la ricerca d'una soluzione elegante.

Avvertasi che quando $\varphi = \frac{\pi}{2}$ i punti S_x , ecc., coincidono coi corrispondenti T_x e colle cuspidi, talchè le bitangenti sono anche tangenti cuspidali. L'andamento della L è simile a quello dell'asteroide ordinaria.

⁽²³⁾ Una volta scritta l'equazione $\psi(xy) = 0$ di L la discriminazione fra due casi (2 e 4 soluzioni reali) si compie razionalmente e resta affidata al segno di ψ .

21. Nel caso $\varkappa > \varphi$ ($k^2 > 0$) l'andamento dei due rami L_1, L_2 della L si riconosce chiaramente, una volta che siano segnate le tangenti ad L nei due nodi impropri M, N .

Il problema può essere risolto completando gli sviluppi del n.º 18, sul caso duale, colla determinazione dei contatti delle bitangenti a C uscenti dall'origine. Ma val la pena, anche in ragion di semplicità e di adattamento alle condizioni attuali, d'indicarne una elegante soluzione diretta.

Una retta m dell'inviluppo Γ che tagli gli assi nei punti X, Y (di ascisse x, y legate dalla $f(xy) = 0$) ed abbia il contatto improprio, è parallela alla $m' = X'Y'$ infinitamente vicina, talchè i triangoli $OXY, OX'Y'$ risultano simili. Ciò porge subito, accanto alla $f(xy) = 0$ la condizione $dx:dy = x:y$, ed in definitiva, per le incognite x, y , il sistema

$$(4.13) \quad f(xy) = 0 \quad xf'_x + yf'_y = 0.$$

Se poi, mettendo in evidenza i termini dei vari gradi scriviamo

$$(4.14) \quad f = \varphi_4 + \varphi_2 + \varphi_0,$$

con

$$(4.15) \quad \varphi_4 = m^2 k^2 x^2 y^2, \quad \varphi_2 = 2xy \cos \varphi (1 + m^2) - (x^2 + y^2), \quad \varphi_0 = m^2$$

la seconda delle (4.13), combinata colla relazione di EULERO, porge $4\varphi_4 + 2\varphi_2 = 0$. indi, combinando con $f = 0$, conduce a sostituire a (4.13) il sistema assai più semplice

$$(4.16) \quad \varphi_4 = \varphi_0, \quad \varphi_2 + 2\varphi_0 = 0,$$

cioè, per disteso

$$(4.14) \quad \begin{cases} xy = \pm \frac{1}{k} \\ x^2 + y^2 - 2xy \cos \varphi (1 + m^2) - 2m^2 = 0. \end{cases}$$

L'eliminazione di y dà subito le due equazioni biquadratiche in x

$$(4.18) \quad \begin{cases} k^2 x^4 - 2kx^2 \{ (1 + m^2) \cos \varphi + m^2 k \} + 1 = 0 \\ k^2 x^4 + 2kx^2 \{ (1 + m^2) \cos \varphi - m^2 k \} + 1 = 0, \end{cases}$$

indi le intersezioni dell'asse x colle otto tangenti ad L a contatto improprio (quattro reali, relative ai nodi M, N , e quattro immaginarie, relative ai punti doppi isolati M_1, N_1).

I discriminanti delle (4.18) sono ancora, salvo il fattore k^2 , quelli compendianti dalla (4.10), quindi positivi. Pertanto quelle equazioni forniscono per x^2 quattro valori reali.

Nel caso della prima equazione che presenta due variazioni quei valori sono anche positivi, e perciò son reali i quattro valori di x , a due a due opposti di segno, che se ne traggono. Invece la seconda presenta due permanenze (perchè, come risulta dal n.º 18, il coefficiente di x^2 è positivo) e quindi dà per x^2 due valori negativi.

In conclusione la prima delle (4.18) dà i valori di x relativi ai punti nodali, e la seconda quelli relativi ai punti isolati.

Data la simmetria del problema, i valori di y sono gli stessi di quelli di x , e l'associazione fra un valore di x ed il corrispondente di y è data (per il caso che a noi interessa, delle tangenti in M, N) dalla prima delle (4.17) col segno superiore, cioè da

$$(4.19) \quad xy = \frac{1}{k}.$$

Ne discende che ai due valori positivi di x , che indicheremo con ξ_1, ξ_2 , corrispondono i due valori positivi di y (che sono ancora ξ_1, ξ_2), ed è facile vedere che l'associazione accoppia $x = \xi_1$ con $y = \xi_2$, ed $x = \xi_2$ con $y = \xi_1$. Basta a tal fine osservare che la prima della (4.18) porge $\xi_1^2 \xi_2^2 = \frac{1}{k^2}$, e confrontare colla (4.19).

La situazione delle tangenti $m_1, m_2; n_1, n_2$ in M, N è pertanto quella della Figura 8 (relativa ai valori $\varphi = \frac{\pi}{6}$, $\varkappa = \frac{\pi}{4}$) nella quale i punti d'incontro di quelle tangenti cogli assi si son designati coll'indicazione dei valori delle rispettive ascisse.

Se si divide la prima delle (4.18) per k^2 , il coefficiente di $-2x^2$ resta

$$\frac{1 + m^2}{k} \cdot \cos \varphi + m^2,$$

ed è quindi $> m^2$. Ciò assicura che dei due valori di x^2 , quello, sia ξ_1^2 , numericamente maggiore, è $> m^2$, talchè $\xi_1 > m$. Pertanto i punti di ascissa $\pm \xi_1$ giacciono, sugli assi, al di là dei corrispondenti contatti.

Invece ξ_2 può essere tanto maggiore quanto minore di m . Invero la prima delle (4.18) mostra che, fisso restando φ , quando \varkappa tende a φ e quindi k a zero, entrambi i numeri ξ_1, ξ_2 tendono all'infinito, mentre m tende al valore finito $\text{tang } \varphi$, sicchè per \varkappa prossimo a φ si ha $\xi_2 > m$. Invece quando, sempre restando fisso φ , \varkappa tende a $\frac{\pi}{2}$, m tende all'infinito con ξ_1 , mentre ξ_2 tende a zero, onde

per \varkappa prossimo a $\frac{\pi}{2}$ si ha $\xi_2 < m$.

Tracciando la curva in base alle indicazioni fornite dalla nostra analisi si vede che ciascun ramo è del tipo (affine) d'una iperbole, le due iperboli incrociandosi nei punti impropri M, N ; talchè, dal punto di vista della *topologia proiettiva* la nostra curva si compone di *due ovali distinte secantisi in due punti*, e perciò divide il piano proiettivo in quattro regioni; quella interna ad entrambe le ovali

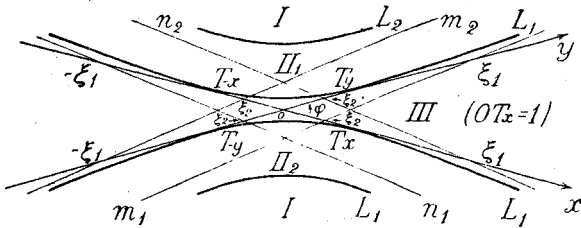


Fig. 8

(contrassegnata con I) dai punti della quale non escono tangenti reali, quelle (II_1, II_2) formate dai punti interni ad un'ovale ed esterni all'altra, dai quali escono due tangenti reali, ed infine la regione (III) dei punti esterni ad entrambe le ovali che sono origini di quattro tangenti reali. Pertanto *per le soluzioni reali del problema considerato alla fine del n.º 20, si presentano, nel caso $z > \varphi$, tutte le alternative possibili* ⁽²⁴⁾.

22. Completeremo la nostra analisi con qualche indicazione sul caso $z = \varphi$. Fisso restando φ , la relativa curva L (che ora è razionale e del 6º ordine) può considerarsi come limite tanto di quella della Fig. 7, quanto di quella della Fig. 8, e precisamente:

Nel primo caso i contatti delle bitangenti x, y restano al finito, mentre i punti S (S_x ecc.) e con essi le cuspidi tendono all'infinito. Ciascuna coppia di cuspidi simmetriche rispetto all'origine genera una cuspidine impropria; i due archi della curva, compresi ciascuno fra due cuspidi, ed attraversanti gli assi (nei punti $S_x, S_y; S_{-x}, S_{-y}$) si appiattiscono sulla retta impropria la quale si stacca come doppia da L .

Nel secondo caso i contatti delle bitangenti restano ancora al finito, mentre le quattro tangenti nodali m_1, m_2, n_1, n_2 tendono alla retta impropria. Ciascuno dei nodi impropri M, N va a sovrapp-

⁽²⁴⁾ In questo caso il segno del primo membro, ϕ , dell'equazione di L , giova a discriminare i casi I, III dai casi II_1, II_2 ; una discriminazione più completa si raggiunge in base alla suddivisione determinata nel piano dalle rette m_1, m_2, n_1, n_2 (delle quali si scrivono subito le equazioni).

porsi ad uno dei punti doppi isolati M_1, N_1 generando una cuspid impropria.

Gli archi esterni dei due rami L_1, L_2 (quelli che contornano la regione I) si appiattiscono sulla retta impropria, la quale si stacca come doppia, e spariscono; gli altri due archi vanno a comporre insieme un ramo unico con due cuspidi improprie.

A conferma, valgano le seguenti osservazioni:

a) L'inviluppo Γ acquista, come già si è osservato (n.º 5, d) una terza retta doppia (impropria) quindi il carattere τ (n.º 3) della L vale 3, mentre i valori 4 e 0 di m ed i restano inalterati: ne conseguono, per i caratteri plückeriani di L , i valori:

$$(4.20) \quad n = 6, \quad m = 4, \quad d = 4, \quad k = 6, \quad \tau = 3, \quad i = 0.$$

Poichè, come si confermerà tra poco sul caso duale, la nuova retta doppia di Γ non è isolata (C ha un *nodo* nell'origine) così $\tau'' = 0$, e la formula di KLEIN (n.º 16) porge

$$k' + 2d'' = 2.$$

D'altronde anche ora (e ciò si vede collo stesso ragionamento del n.º 16) d'' è pari, quindi $d'' = 0, k' = 2$.

b) Una semplice ispezione dell'equazione di C (duale di Γ)

$$(4.21) \quad x^2 y^2 \sin^2 z - (x^2 + y^2) \cos^2 z + 2xy \cos z = 0,$$

(la quale non è altro che la (2.10) scritta nelle x, y) mostra che quella curva ha un nodo nell'origine, colle tangenti

$$(4.22) \quad (x^2 + y^2) \cos z - 2xy = 0,$$

cioè separatamente

$$(4.23) \quad y \cos z = x(1 \pm \sin z).$$

Poichè nella (4.21) mancano i termini di terzo grado, così quelle tangenti sono *inflexionali*; ne derivano, per dualità, le due cuspidi improprie di L .

c) Ciascuna delle tangenti (4.22) è limite di due fra le bitangenti (4.9) ($\varphi = z, k = 0$) relative a differente scelta del segno ambiguo. Poichè le due bitangenti ottenute per una determinata scelta, in quanto scambiate tra di loro dalla simmetria ($x' = y, y' = x$) sono entrambe nodali od entrambe isolate, così, al limite, sono due tangenti di tipo diverso che vanno a coincidere. Donde per dualità l'asserita genesi delle cuspidi improprie di Γ .

Al lettore la figura.