
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GIUSEPPE PALAMA

**Sull'equazione differenziale lineare
soddisfatta dal prodotto $u_1 u_2 \dots u_m$
degli integrali particolari della
 $u'' + f_1 u' + f_2 u = 0$, e su di una formula
integrale dei polinomi d'Hermite**

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2,
Vol. 1 (1939), n.3, p. 230-235.

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_3_230_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_3_230_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sull'equazione differenziale lineare soddisfatta dal prodotto
 $u_1 u_2 \dots u_m$ degli integrali particolari della

$$u'' + f_1 u' + f_2 u = 0,$$

e su di una formula integrale dei polinomi d'Hermite.

Nota di G. PALAMÀ (a Lecce).

Sunto. - Si tratta la questione indicata nella prima parte del titolo e applicando uno dei risultati cui si perviene, si stabilisce poi la

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{2n}^3(x) H_{2m}(x) dx = a_{2m} 2^{2n} (2m)! \sqrt{\pi}, \quad m \leq 3n,$$

in cui a_{2m} è dato da formula ricorrente.

Facendo seguito ad un mio lavoro, in corso di pubblicazione negli « Annali », mi occupo in questa piccola Nota della seguente altra generalizzazione della questione trattata al N. 1 di quel lavoro.

Qual'è l'equazione differenziale d'ordine minimo cui soddisfa ciascuno di tutti i prodotti possibili del tipo:

$$(1) \quad cu_1 u_2 \dots u_m, \quad c \text{ costante,}$$

essendo u_1 soluzione dell'equazione

$$(2) \quad u'' + f_1 u' + f_2 u = 0,$$

ed f_1, f_2 funzioni qualsiasi della x che ammettono tutte le derivate che occorrono?

Del risultato trovato dalla risoluzione della indicata questione, si fanno poi delle applicazioni fra cui quella, credo interessante, di determinare, a mezzo di formula ricorrente, il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^3(x) H_m(x) dx.$$

1. Trattiamo la riferita questione col metodo, opportunamente generalizzato, impiegato dagli Autori citati nella nota ⁽¹⁾ della detta Nota degli « Annali », perchè ora ⁽¹⁾ questo metodo, non perde credo la sua eleganza.

⁽¹⁾ Cfr. l'introduzione della detta Nota di prossima pubblicazione negli « Annali ».

Derivando successivamente la (1), abbiamo

$$(3) \quad \begin{aligned} y' &= u_1' u_2 \dots u_m + u_1 u_2' \dots u_m + \dots + u_1 u_2 \dots u_m', \\ y'' &= u_1'' u_2 \dots u_m + u_1 u_2'' \dots u_m + \dots + u_1 u_2 \dots u_m'' + \\ &+ 2u_1' u_2' \dots u_m + 2u_1' u_2' u_3' \dots u_m + 2u_1 u_2 \dots u_{m-1}' u_m' \end{aligned}$$

Se ora eliminiamo u_i'' fra la precedente e la (2), si ha

$$(4) \quad \begin{aligned} y'' &= -f_1 y' - f_2 m y + 2u_1' u_2' \dots u_m + \\ &+ 2u_1' u_2' u_3' \dots u_m + \dots + 2u_1 \dots u_{m-1}' u_m' \end{aligned}$$

che derivata e qualora si utilizzino la (2), la (4) stessa e la (3), dà

$$(5) \quad \begin{aligned} y''' &= -3f_1 y'' + [-2f_1^2 - f_1' - (3m-2)f_2] y' + \\ &+ (-f_2' m - 2f_1 f_2 m) y + 6u_1' u_2' u_3' \dots u_m + 6u_1' u_2' u_3' u_4' \dots u_m + \\ &+ \dots + 6u_1 \dots u_{m-3}' u_{m-2}' u_{m-1}' u_m'. \end{aligned}$$

Le espressioni dei secondi membri della (4) e della (5) fanno pensare che si abbia in generale

$$(6) \quad y^{(r)} = \mu_{r,1} y^{(r-1)} + \mu_{r,2} y^{(r-2)} + \dots + \mu_{r,r} y + r! C_{m,r},$$

in cui $\mu_{r,1}$, $\mu_{r,2}$, ..., $\mu_{r,r}$ sono funzioni di f_1 , f_2 e delle loro derivate e $C_{m,r}$ è uguale alla somma di tutti i prodotti possibili, di m fattori, del tipo

$$u_{i_1}' u_{i_2}' \dots u_{i_r}' u_{i_{r+1}} \dots u_{i_m},$$

in cui

$$i_1, i_2, \dots, i_r$$

è una qualunque delle possibili combinazioni ad r , ad r , senza ripetizione dei numeri 1, 2, ..., m .

Difatti è facile verificare, se deriviamo la (6), teniamo presente la (2) e la (6) stessa, che si ha, come si vuol dimostrare, un'equazione del tipo

$$(7) \quad y^{(r+1)} = \mu_{r+1,1} y^{(r)} + \mu_{r+1,2} y^{(r-1)} + \dots + \mu_{r+1,r+1} y + (r+1)! C_{m,r+1},$$

ove si è posto

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \mu_{r+1,1} &= \mu_{r,1} - r f_1, \quad \mu_{r+1,2} = \mu_{r,1} + \mu_{r,2} + r f_1 \mu_{r,1} - f_2 r(m-r+1), \\ \mu_{r+1,i+1} &= \mu_{r,i} + \mu_{r,i+1} + r f_1 \mu_{r,i} + f_2 r(m-r+1) \mu_{r-1,i-1}, \\ & \quad i = 2, 3, \dots, r-1, \\ \mu_{r+1,r+1} &= \mu_{r,r} + r f_1 \mu_{r,r} + f_2 r(m-r+1) \mu_{r-1,r-1} \end{aligned} \right. \text{e}$$

essendo

$$\mu_{1,1} = 0, \quad \mu_{2,1} = -f_1, \quad \mu_{2,2} = -m f_2$$

Si tenga però presente che le (8) valgono tanto per equazioni del tipo della (6) quanto per quelle del tipo della (12) del N. successivo.

2. Le (8) sono delle formule ricorrenti che permettono, conosciute le $\mu_{r-1,i}$, $\mu_{r,i}$ di calcolarsi le $\mu_{r+1,j}$. Dalle due prime si traggono però subito due utili formule. La prima di esse sommata con le formule che da essa si traggono per $r = r - 1, \dots, 1$, dà

$$(9) \quad \mu_{r+1,1} = - \binom{r+1}{2} f_1.$$

Analogamente dalla 2^a delle (8), ponendo $r = r, r - 1, \dots, 2$ e sommando tutte le formule che si ottengono, per note identità, si ricava

$$\mu_{r+1,2} = - \binom{r+1}{3} \left(f_1' + \frac{3r+2}{4} f_1^2 \right) + \binom{r+1}{2} \frac{2r-3m-2}{3} f_2$$

che per $r = m$, diventa

$$(10) \quad \mu_{m+1,2} = - \binom{m+1}{3} \left(f_1' + \frac{3m+2}{4} f_1^2 \right) - \binom{m+2}{3} f_2.$$

Ma si noti che il procedimento per ricavare dalla (6) la (7), se continuato deve aver termine. Difatti ponendo nella (7) $r = m - 1$, si ha

$$(11) \quad y^{(m)} = \mu_{m,1} y^{(m-1)} + \mu_{m,2} y^{(m-2)} + \dots + \mu_{m,m} y + m! C_{m,m},$$

da cui derivando e tenendo presenti la (2), la (11) e l'equazione che si trae dalla (7) per $r = m - 2$, si ha infine un'equazione differenziale del tipo

$$(12) \quad y^{(m+1)} = \mu_{m+1,1} y^{(m)} + \mu_{m+1,2} y^{(m-1)} + \dots + \mu_{m+1,m+1} y.$$

Quest'ultima risolve la questione propostaci in principio del n.º precedente, se si utilizzano le formule ricorrenti (8).

Se U_1, U_2 sono integrali particolari della data equazione (2) l'integrale generale della precedente è

$$y = c_0 U_1^m + c_1 U_1^{m-1} U_2 + \dots + c_{m-1} U_1 U_2^{m-1} + c_m U_2^m, \quad c_i \text{ costanti.}$$

Si noti che, essendo $m + 1$ gli integrali particolari linearmente indipendenti che figurano nella precedente, ed essendo uguale ad $m + 1$ l'ordine della (12), essa ha l'ordine minimo fra tutte quelle cui soddisfa ogni integrale particolare del tipo (1).

3. Se è per es. $m = 3$, la (12) diventa

$$(13) \quad y^{IV} = \mu_{4,1} y''' + \mu_{4,2} y'' + \mu_{4,3} y' + \mu_{4,4} y.$$

Occorre qui calcolarsi $\mu_{4,i}$. Dalle (9) e (10) si ha subito

$$\mu_{4,1} = -6f_1, \quad \mu_{4,2} = -(11f_1^2 + 10f_2 + 4f_1').$$

La 3^a e la 4^a invece della (8), danno rispettivamente, quando

si tengono presenti le due ultime delle (8) stesse ed i valori di $\mu_{3,2}$, $\mu_{3,3}$ che traggono dalla (5)

$$\begin{aligned}\mu_{3,3} &= -(7f_1f_1' + 6f_1^3 + 30f_1f_2 + f_1'' + 10f_2'), \\ \mu_{4,4} &= -(3f_2'' + 15f_1f_2' + 18f_1^2f_2 + 6f_1'f_2 + 9f_2^2); \end{aligned}$$

quindi infine la (13) può scriversi

$$(14) \quad \begin{aligned} &y^{iv} + 6f_1y''' + (11f_1^2 + 10f_2 + 4f_1')y'' + \\ &\quad + (7f_1' + 6f_1^3 + 30f_1f_2 + f_1'' + 10f_2')y' + \\ &\quad y' + (3f_2'' + 15f_1f_2' + 18f_1^2f_2 + 6f_1'f_2 + 9f_2^2)y = 0. \end{aligned}$$

4. Applichiamo la (4) per scrivere le equazioni differenziali particolari cui soddisfano $H_n^3(x)$, $[L_n^{(\alpha)}(x)]^3$, $I_n^3(x)$, ove $H_n(x)$, $L_n^{(\alpha)}(x)$, $I_n(x)$, indicano rispettivamente il polinomio d'HERMITE, quello di LAGUERRE e la funzione di BESSEL di prima specie.

Nel primo di questi casi è

$$f_1 = -2x, \quad f_2 = -2n.$$

Fatte nella (14) queste sostituzioni, si ha

$$(15) \quad \begin{aligned} &y^{iv} - 12y''' + 4(11x^2 + 5n - 2)y'' - 4x(12x^2 + 30n - 7)y' + \\ &\quad + 12n(12x^2 + 3n - 2)y = 0 \end{aligned}$$

che ha per integrale generale ⁽²⁾

$$y = c_1 H_n^3(x) + c_2 H_n^2(x) K_{\frac{n}{2}} \left(\frac{-\frac{1}{2}}{x^2} \right) + c_3 H_n(x) \left[K_{\frac{n}{2}} \left(\frac{-\frac{1}{2}}{x^2} \right) \right]^2 + c_4 \left[K_{\frac{n}{2}} \left(\frac{-\frac{1}{2}}{x^2} \right) \right]^3,$$

per n pari,

$$y = c_1 H_n^3(x) + c_2 H_n^2(x) K_{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\frac{1}{2}}{x^2} \right) + c_3 H_n(x) \left[K_{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\frac{1}{2}}{x^2} \right) \right]^2 + c_4 \left[K_{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\frac{1}{2}}{x^2} \right) \right]^3,$$

per n dispari.

Nel 2° caso invece

$$f_1 = \frac{x-x+1}{x}, \quad f_2 = \frac{n}{x},$$

e quindi dalla (14) ricaviamo

$$\begin{aligned} &x^3 y^{iv} + 6(x-x+1)x^2 y''' + [11x^2 - 2(11x - 5n + 11)x + \\ &\quad + (11x + 7)(x+1)]xy' + \{-6x^3 + 6(3x - 5n + 3)x^2 - \\ &\quad - [2(3x + 2)(3x - 5n + 3) - \alpha - 1]x + (x+1)(2x+1)(3x+1)\}y' + \\ &\quad + 3n[6x^2 + (3n - 12x - 7)x + (2x+1)(3x+1)]y = 0, \end{aligned}$$

⁽²⁾ Cfr. loc. cit.

il cui integrale generale è ⁽³⁾

$$y = c_1 [L_n^{(\alpha)}(x)]^3 + c_2 [L_n^{(\alpha)}(x)]^2 K_n^{(\alpha)}(x) + c_3 L_n^{(\alpha)} [K_n^{(\alpha)}]^2 + c_4 [K_n^{(\alpha)}(x)]^3,$$

se α non è intero e c_i sono delle costanti arbitrarie.

Infine nel 3° caso, si ha

$$f_1 = \frac{1}{x}, \quad f_2 = 1 - \frac{n^2}{x^2}$$

e quindi dalla (14) si trae

$$x^4 y^{IV} + 6x^3 y''' + (10x^2 - 10n^2 + 7)x^2 y'' + (30x^2 - 10n^2 + 1)xy' + \\ + 3[3x^4 + 2(2 - 3n^2)x^2 + 3n^4]y = 0,$$

con

$$y = c_1 I_n^3(x) + c_2 I_n^2(x) I_{-n}(x) + c_3 I_n(x) I_{-n}^2(x) + c_4 I_{-n}^3(x), \quad c_i \text{ costanti,}$$

nel caso che n non sia nè intero nè nullo. In modo analogo si scrive l'integrale generale quando n è intero o nullo.

5. Facciamo della (15) un'applicazione analoga a quella fatta al N. 8 della (36) del più volte citato mio lavoro.

Dalla (15) cambiando n in $2n$, abbiamo

$$(16) \quad y^{IV} - 12xy''' + 4(11x^2 + 10n - 2)y'' - 4x(12x^2 + 60n - 7)y' + \\ + 48n(6x^2 + 3n - 1)y = 0.$$

Se inoltre si pone

$$(17) \quad y = H_{2n}^3(x) = \sum_{i=0}^{3n} a_{2i} H_{2i}(x),$$

si ha

$$y^{(r)} = (-1)^r 2^r \sum \frac{a_{2i} (2i)!}{(2i-r)!} H_{2i-r}$$

e quindi se si sostituisce nella (16) al posto di y, y', \dots, y^{IV} i valori dati dalla precedente e si tengono presenti le seguenti relazioni che si ottengono a mezzo della formola ricorrente degli $H_n(x)$:

$$2xH_n(x) = -H_{n+1}(x) - 2nH_{n-1}(x),$$

$$4x^2H_n(x) = H_{n+2}(x) + 2(2n+1)H_n(x) + 4n(n-1)H_{n-2}(x),$$

$$8x^3H_n(x) = -H_{n+3}(x) - 6(n+1)H_{n+1}(x) - 12n^2H_{n-1}(x) - \\ - 8n(n-1)(n-2)H_{n-3}(x),$$

si ha, se si annulla poi il coefficiente di H_2 ,

$$(18) \quad 3(3n-i+1)a_{2i-2} + [2i-7i+6n-2] + 6n(3n+2)a_{2i} - \\ - 4(2i+2)(2i+1)(n+i+1)a_{2i+2} = 0.$$

⁽³⁾ Cfr. loc. cit.

La precedente è una formola ricorrente che permette di ricavare successivamente a_{6n-2} , a_{6n-4} , ..., tenuto presente che è

$$a_{6n} = 1, \quad a_{6n+2} = a_{6n+4} = \dots = 0$$

Procedendo in modo analogo nel caso di n dispari, dopo aver cambiato n in $2n + 1$ nella (15) e posto

$$(19) \quad H^3_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{3n+1} a_{2i+1} H_{2i+1}(x),$$

si ha la seguente formola ricorrente, che può ricavarsi dalla (18) cambiandovi $2i$ in $2i + 1$ e $2n$ in $2n + 1$,

$$(20) \quad 6(3n - i + 2)a_{2i-1} + [(2i + 1)(-14i + 12n - 5) + 3(6n + 7)(2n + 1)]a_{2i+1} - 8(2i + 3)(2i + 2)(n + i + 2)a_{2i+3} = 0$$

Le due formole (18) e (20), se si vuole, possono scriversi nell'unica seguente formola

$$(21) \quad 3(3n - i + 2)a_{i-2} + [i(-7i + 6n - 4) + 3n(3n + 4)]a_i - 4(i + 2)(i + 1)(n + i + 2)a_{i+2} = 0.$$

Poichè è anche ora $a_{3n} = 1$, $a_{3n+2} = a_{3n+4} = \dots = 0$, in particolare dalla (21), per $i = 3n$, $3n - 1$, si ha rispettivamente

$$(22) \quad a_{3n-2} = 6n^2, \quad a_{3n-4} = 6n^2(n - 1)(3n - 1).$$

Se ora moltiplichiamo per es. la (17) per $e^{-x^2} H_{2m}(x) dx$ ed integriamo da $-\infty$ ad ∞ , abbiamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H^3_{2n}(x) H_{2m}(x) dx = \sum_{i=0}^{3n} a_{2i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{2i}(x) H_{2m}(x) dx = \begin{cases} a_{2m} 2^{2m} (2m)! \sqrt{\pi}, & \text{per } m \leq 3n, \\ 0, & \text{per } m > 3n, \end{cases}$$

e quindi per le (22), si hanno in particolare i seguenti integrali

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H^3_{2n}(x) H_{6n}(x) dx = 2^{6n} (6n)! \sqrt{\pi},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H^3_{2n}(x) H_{6n-2}(x) dx = 24n^2 2^{6n-2} (6n - 2)! \sqrt{\pi},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H^3_{2n}(x) H_{6n-4}(x) dx = 24n^2 (2n - 1)(6n - 1) 2^{6n-4} (6n - 4)! \sqrt{\pi}.$$

Analoghi risultati si ottengono utilizzando la (19).