Letterio Toscano

Su i polinomi ipergeometrici

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2, Vol. **1** (1939), n.3, p. 224–229.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_3_224_0>

Su i polinomi ipergeometrici.

Nota di LETTERIO TOSCANO (a Messina).

Sunto. - *L'A., premesse alcune notizie bibliografiche, dà una rappresentazione dei reciproci dei polinomi ipergeometrici, rispetto ad un dato modulo, e presenta in altra forma un risultato già noto.*

1. Le ricerche piuttosto recenti su i legami tra i polinomi ipergeometrici e quelli di APPELL hanno avuto origine con i lavori di

F. VANEY [1], che ha studiato i polinomi

$$P_n(x, a) = e^{-\frac{x}{a}} \frac{a^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^n e^{\frac{x}{a}}\right),$$

e provato che, quali funzioni di a, soddisfano la

$$\frac{dP_n(x,a)}{da} = nP_{n-1}(x, a),$$

cioè appartengono alla classe di APPELL; e che possono generarsi con la funzione di BESSEL-LEGENDRE

$$\Xi(\gamma, x) = {}_0F_1 = \sum \frac{x^m}{(\gamma, m)\, m!}$$

mediante la

$$\Xi(1, hx)e^{hx} = \sum \frac{h^m}{m!} P_m(x, a).$$

Ma prima che in VANEY questo ultimo risultato trovasi in ricerche di SONINE [2], che lo ha trovato per polinomi, da qualche autore chiamati successivamente di SONINE [3], e che differiscono dagli ordinari polinomi di LAGUERRE generalizzati per fattore costante.

Ed ancora il NIELSEN nelle sue *Recherches sur les polynomes d' Hermite* [4] introduce i polinomi

$$H_n(x, a) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{4a}} \frac{(2a)^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{4a}}$$

e prova che

$$\frac{dH_n(x, a)}{da} = -H_{n-2}(x, a).$$

I risultati più generali e importanti in questo campo di ricerche sono dovuti a P. HUMBERT [5], che ha dimostrato appartenere alla

(1) F. VANEY, *Sur les polynomes de Laguerre*, « Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris », t. 172 (1921), p. 1151; Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Lausanne, (Lausanne, 1921).

(2) N. SONINE, *Recherches sur les fonctions cylindriques et le développement des fonctions continues en séries*, « Mathematische Annalen », Bd. XVI (1880), pp. 1-80.

(3) P. HUMBERT, *Monographie des polynomes de Kummer*, « Nouvelles Annales de Mathématiques », 5e série, t. 1 (1922), pp. 81-92.

(4) « Det. Kgl. Danske Videnskabernes Selskab, Mathematisk-Fysiske Meddelelser », I, 6, Copenhague, 1918, pp. 1-78.

(5) P. HUMBERT, *Sur les polynomes hypergéometriques*, « Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris », t. 172 (1921), p. 1282: *Sur des suites de polynomes*, « Journal de Mathématiques pures et appliquées », t. IV, fasc. IV (1925), pp. 355-379.

classe di APPELL i polinomi reciproci dei polinomi ipergeometrici, rispetto ad un dato modulo, e che tali polinomi possono generarsi con la funzione di KUMMER [6]

$$\Phi(\alpha, \gamma, x) = {}_1F_1 = \sum \frac{(\alpha, m)}{(\gamma, m)} \frac{x^m}{m!}.$$

In questa nota vogliamo rappresentare con l'operatore derivata i polinomi considerati da HUMBERT, e quindi fissare per essi una formula di trasformazione che permetterà di presentare il primo risultato dello stesso HUMBERT in altra forma non priva di interesse.

2. La nuova rappresentazione dei reciproci dei polinomi ipergeometrici sarà quì ottenuta con procedimento semplice, mediante una formula sugli operatori differenziali, che passiamo subito a ricavare da altra più generale già da noi stabilita su gli operatori lineari permutabili di secondo ordine.

Siano A e X due operatori lineari associati, cioè tali che

$$AX - XA = 1.$$

In precedenti ricerche abbiamo trovato [7]

$$(X^2A)^n = X^{n+1}A^nX^{n-1},$$

[6] In ricerche importanti sulla trasformazione di LAPLACE, il TRICOMI è pervenuto allo sviluppo della funzione $e t^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{t})$, $(\alpha > -1)$, in serie di polinomi di LAGUERRE, (« Rend. R. Acc. Naz. Lincei », serie 6ª, vol. XXI, 1° sem. 1935, pp. 332-335), e il DOETSCH successivamente all'equazione generatrice di questi mediante la funzione di BESSEL, (idem, vol. XXII, pp. 300-304).

Il PALAMÀ nella sua Nota: *Su taluni polinomi analoghi a quelli di Laguerre e sulla funzione di Bessel*, questo « Bollettino », Agosto 1938, ritrova ancora il risultato che i polinomi

$$A_n^{(\alpha)}(x, a) = \frac{n!\, a^n L_n^{(\alpha)}\left(\frac{x}{a}\right)}{\Gamma(\alpha + n + 1)},$$

con $L_n^{(\alpha)}(x)$ ordinario polinomio di LAGUERRE, si possono generare con la funzione di BESSEL. E servendosi di tale relazione studia i polinomi $A_n^{(\alpha)}(x, a)$.

Più in generale si potrebbero studiare i polinomi di JACOBI collegandoli con la funzione di KUMMER, ma tale metodo non sembra sempre fecondo e vantaggioso in confronto agli altri noti.

[7] L. TOSCANO, *Operatori lineari e numeri di Stirling generalizzati*, « Annali di Matematica », serie IV, t. XIV (1935-36), pp. 287-297; *Su gli operatori lineari associati*, « Atti R. Istituto Veneto », t. XCVI (1936-37), pp. 457-473.

e posto, come è lecito, $X = x^{-1}$, $A = D_{x^{-1}}$, con D_z simbolo di derivazione rispetto a z, si ha

$$(x^{-2}D_{x^{-1}})^n = x^{-n-1}D^n_{x^{-1}}x^{-n+1}.$$

Ma

$$x^{-2}D_{x^{-1}} = -D_x$$

e quindi

$$(-1)^nD^n_x = x^{-n-1}D^n_{x^{-1}}x^{-n+1},$$

da cui segue la formula che si voleva ricavare

$$D^n_{x^{-1}} = (-1)^n x^{n+1}D^n_x x^{n-1}.$$

3. Diciamo di JACOBI i polinomi ipergeometrici

$$F_n(\beta, \gamma, x) = {}_2F_1(-n, \beta, \gamma, x) = \sum_0^n{}_i (-1)^i \binom{n}{i} \frac{(\beta, i)}{(\gamma, i)} x^i,$$

dove ${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, x)$ rappresenta la serie ipergeometrica di GAUSS

$$\sum_0^\infty{}_i \frac{(\alpha, i)(\beta, i)}{(\gamma, i)\, i\,!} x^i.$$

Essi possono ancora presentarsi nell' altra forma

$$F_n(\beta, \gamma, x) = \frac{1}{(\gamma, n)} x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\beta+n} D^n_x x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\beta-\gamma};$$

e in particolare i polinomi

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n\,!} D^n_x\, x^n e^{-x}$$

$$L^{(\gamma)}_n(x) = \frac{x^{-\gamma} e^x}{n\,!} D^n_x x^{n+\gamma} e^{-x}$$

$$V_n(x) = \frac{1}{n\,!} D^n_x x^n (1-x)^n$$

si dicono rispettivamente di LAGUERRE semplici o generalizzati, e di LEGENDRE.

Altri autori chiamano di JACOBI i polinomi [8]

$$J_n(x, \lambda, \mu) = (x+1)^{-\lambda}(x-1)^{-\mu} D^n_x (x+1)^{n+\lambda}(x-1)^{n+\mu},$$

(8) A. ANGELESCO, *Sur des polynomes généralisant les polynomes de Legendre et d'Hermite...*, Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris, (Paris, 1916).

G. PÓLYA e G. SZEGÖ, [« Aufgaben u. lehrsätze », I, (Berlin, 1925), p. 127]. chiamano di JACOBI i polinomi $\frac{1}{2^n n\,!} J_n(x, \lambda, \mu)$.

ed è facile stabilire le relazioni di passaggio

$$J_n(x, \lambda, \mu) = (-1)^n 2^n (\lambda+1, n) F_n\left(n+\mu+\lambda+1, \lambda+1, \frac{1+x}{2}\right)$$

$$F_n(\beta, \gamma, x) = \frac{(-1)^n}{(\gamma, n)2^n} J_n(2x-1, \gamma-1, \beta-\gamma-n).$$

Posto ora $x = \frac{k}{y}$ si ha $D_x = D_{ky^{-1}} = \frac{1}{k} D_{y^{-1}}$, e dalla seconda relazione di definizione dei polinomi di JACOBI segue

$$(\gamma, n) y^n F_n\left(\beta, \gamma, \frac{k}{y}\right) = y^{\beta-1}(y-k)^{\gamma-\beta+n} D^n_{y^{-1}}\, y^{-n-\beta+1}(y-k)^{\beta-\gamma}.$$

Ma per la formula del n. 2 è

$$D^n_{y^{-1}} = (-1)^n y^{n+1} D^n_y\, y^{n-1},$$

e quindi si ricava il risultato

$$y^n F_n\left(\beta, \gamma, \frac{k}{y}\right) = \frac{(-1)^n}{(\gamma, n)} y^{\beta+n}(y-k)^{\gamma-\beta+n} D^n_y\, y^{-\beta}(y-k)^{\beta-\gamma}.$$

Posto $\beta = \frac{1}{\varepsilon}$ e sostituendo k con εk, al limite per $\varepsilon \to 0$ si ha

$$y^n \lim_{\varepsilon \to 0} F_n\left(\frac{1}{\varepsilon}, \gamma, \frac{\varepsilon k}{y}\right) = \frac{(-1)^n}{(\gamma, n)} y^{2n+\gamma} e^{\frac{k}{y}} D^n_y\, y^{-\gamma} e^{\frac{k}{y}};$$

e poichè

$$\frac{(\gamma, n)}{n!} y^n \lim_{\varepsilon \to 0} F_n\left(\frac{1}{\varepsilon}, \gamma, \frac{\varepsilon k}{y}\right)$$

rappresenta i reciproci rispetto a k dei polinomi di LAGUERRE $L_n^{(\gamma-1)}(y)$, si ha per questi polinomi reciproci la rappresentazione (9)

$$\frac{(-1)^n}{n!} y^{2n+\gamma} e^{\frac{k}{y}} D^n_y\left(\frac{e^{-\frac{k}{y}}}{y^k}\right).$$

Analogamente, per $\beta = n+1$ e $\gamma = 1$ si ha

$$y^n F_n\left(n+1, 1, \frac{k}{y}\right) = \frac{(-1)^n}{n!} y^{2n+1} D^n_y \frac{(y-k)^n}{y^{n+1}}.$$

e poichè

$$y^n F_n\left(n+1, 1, \frac{k}{y}\right)$$

rappresenta i reciproci rispetto a k dei polinomi di LEGENDRE

(9) Cfr. VANEY e PALAMÀ, note (1) e (6).

$V_n(x)$, vale per questi reciproci la rappresentazione

$$\frac{(-1)^n}{n!} y^{2n+1} D_y^n \frac{(y-k)^n}{y^{n+1}}$$

Infine confrontando le rappresentazioni, mediante l'operazione di derivata, dei polinomi di JACOBI e dei rispettivi reciproci, si deduce, con $k=1$ per semplicità,

$$y^n F_n\left(\beta, \gamma, \frac{1}{y}\right) = (-1)^n \frac{(\beta, n)}{(\gamma, n)} F_n(-n-\gamma+1, -n-\beta+1, y).$$

E il risultato di HUMBERT che i polinomi $y^n F_n\left(\beta, \gamma, \frac{1}{y}\right)$ sono della classe di APPELL si può trasformare dicendo che alla classe di APPELL appartengono i polinomi

$$(-1)^n \frac{(\beta, n)}{(\gamma, n)} F_n(-n-\gamma+1, -n-\beta+1, y).$$