Bollettino Unione Matematica Italiana

Mario Manarini

Sul moto di una massa attratta da un centro fisso con la legge di Newton

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2, Vol. **1** (1939), n.3, p. 220–224.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_3_220_0>

Sul moto di una massa attratta da un centro fisso con la legge di Newton.

Nota di MARIO MANARINI (a Bologna).

Sunto. - *Si espone un procedimento d'integrazione dell'equazione del moto di una massa puntiforme attratta da un centro fisso con la legge di* NEWTON, *col quale al vettore che determina il piano dell'orbita e la costante delle aree, si associa un altro vettore che determina l'asse focale della traiettoria, l'eccentricità di questa e insieme al vettore precedente, la costante dell'energia.*

Credo non privo di interesse esporre un particolare procedimento d'integrazione dell'equazione del classico problema del moto di una massa puntiforme attratta da un punto fisso O con legge newtoniana, ispirato dalla lettura di un interessante articolo di W. LENZ [1]. A questo problema fondamentale, si riconduce il problema astronomico dei due corpi mobili nello spazio soggetti

[1] W. LENZ, *Ueber den Bewegunsverlauf und die Quantenzustände der gestörten Keplerbewegung.* [« Zeitschrift für Physik », Band 24, 1924, pagine 197-207].

alla legge di NEWTON, ed ancora ad esso si riattacca la teoria atomica di BOHR relativa al moto dell'elettrone intorno al nucleo (teoria dei sistemi idrogenoidi) [2]. Il metodo vettoriale si presta assai bene per trattare il problema suddetto ed in particolare per stabilire che la traiettoria è una conica, di cui il centro fisso O occupa uno dei fuochi; e qui vogliamo mettere in luce un elegante modo di individuare tale traiettoria mediante due vettori. costanti d'integrazione e quindi dipendenti dalle condizioni iniziali. Essi precisano la posizione nello spazio dell'orbita e le sue caratteristiche geometriche, giacchè l'uno fissa il piano per O a cui appartiene la conica e l'altro ne fissa l'eccentricità e l'asse focale (nel caso del moto kepleriano ne fissa la retta degli apsidi e la posizione del perielio). Inoltre gli stessi vettori determinano, naturalmente, anche le caratteristiche meccaniche del moto e precisamente: l'uno la costante delle aree e insieme la costante dell'energia.

Riferendoci dunque al caso del punto-massa P attratto con legge newtoniana dal punto fisso O, diciamo $\mathbf{a}$ il versore del vettore $P - O$ e poniamo

$$P - O = r\mathbf{a} \qquad r = \mathrm{mod}\,(P - O). \tag{1}$$

Se $\mathbf{v}$ è il vettore velocità del punto P, l'equazione del moto si può scrivere nella forma

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -f\frac{1}{r^2}\mathbf{a}, \tag{2}$$

con f costante [3] e si ha

$$\mathbf{v} = \frac{dP}{dt} = r\mathbf{a}' + r'\mathbf{a}, \qquad \left(\mathbf{a}' = \frac{d\mathbf{a}}{dt}, \quad r' = \frac{dr}{dt}\right). \tag{3}$$

Moltiplicando vettorialmente $\mathbf{a}$ per l'accelerazione di P, in base alla (2), si ottiene

$$\mathbf{a} \wedge \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0, \tag{4}$$

che si può scrivere

$$\frac{d\{(P - O) \wedge \mathbf{v}\}}{dt} = 0,$$

ossia

$$(P - O) \wedge \mathbf{v} = \mathbf{c} \qquad \text{(costante)}. \tag{5}$$

[2] Cfr. E. FERMI, *Introduzione alla fisica atomica.* [Zanichelli, Bologna. 1928, pag. 111]. Ed ancora E. PERSICO, *Fondamenti della meccanica atomica.* [Zanichelli, Bologna, 1936, pag. 254].

[3] Nel caso del moto dell'elettrone di carica $-e$, attratto dal nucleo di carica Ze, dove Z è il numero atomico ($Z=1$ per l'idrogeno, $Z=2$ per l'elio a cui si è strappato un elettrone) è $f = Ze^2$.

Così si deduce che la traiettoria di P è una curva piana e si è in presenza del ben noto *integrale del momento dell'impulso* o *integrale delle aree*. Il vettore $\mathbf{c}$, il cui modulo è il doppio della velocità areale costante di P rispetto ad O e dipende dalla posizione iniziale P_0 e velocità iniziale $\mathbf{v}_0$ di P mediante la relazione

$$\mathbf{c} = (P_0 - O) \wedge \mathbf{v}_0, \tag{5'}$$

determina la giacitura della traiettoria, che apparterrà al piano per O perpendicolare a $\mathbf{c}$.

Oltre al vettore costante $\mathbf{c}$, coi significati geometrico e meccanico ora precisati, si può determinare un altro notevole vettore appartenente al piano della traiettoria, che si mantiene pure costante durante il moto di P e serve a precisare la forma e la posizione di quella.

Moltiplicando vettorialmente il vettore $\mathbf{c}$, pure per l'accelerazione di P, si ha successivamente

$$\mathbf{c} \wedge \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{f}{r^2}\mathbf{c} \wedge \mathbf{a} = -\frac{f}{r^2}\{(P - O) \wedge \mathbf{v}\} \wedge \mathbf{a} =$$
$$= -\frac{f}{r^2}\{(P - O) \wedge r\mathbf{a}'\} \wedge \mathbf{a} = -f\cdot(\mathbf{a} \wedge \mathbf{a}') \wedge \mathbf{a} = -f\mathbf{a}' \text{ (}^4\text{)}, \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{a}' = 0).$$

Di qui si trae

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{c} \wedge \mathbf{v} + f\mathbf{a}) = 0, \tag{6}$$

e questa è un'osservazione fondamentale per quel che segue. Infatti si deduce da essa

$$\mathbf{c} \wedge \mathbf{v} + f\mathbf{a} = f\mathbf{c}_1, \tag{7}$$

ossia, per la (3),

$$[(P - O) \times \mathbf{v}]\mathbf{v} + (f - rv^2)\mathbf{a} = f\mathbf{c}_1, \tag{7'}$$

dove $\mathbf{c}_1$ è un vettore costante, evidentemente parallelo al piano della traiettoria di P. Esso viene determinato dalle condizioni iniziali che fissano P_0, la velocità $\mathbf{v}_0$ e determinano $\mathbf{c}$.

Poichè P ha velocità areale costante intorno ad O, descriverà una curva che si svilupperà intorno al punto O cosicchè si potrà considerare la posizione P_1 di P per cui $P_1 - O$ risulta con la direzione di $\mathbf{c}_1$. Se diciamo $\mathbf{v}_1$ la velocità di P in P_1, la (7), che diviene una relazione del tipo

$$\mathbf{c} \wedge \mathbf{v}_1 = q\mathbf{c}_1,$$

(4) Si ricordi la formula del doppio prodotto vettoriale

$$(x \wedge y) \wedge z = (x \times z)y - (y \times z)x.$$

mette in evidenza che in P_1 i vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{c}_1$ risultano perpendicolari.

Pertanto la traiettoria di P attraversa ortogonalmente la retta per O parallela a $\mathbf{c}_1$; ossia nei punti di tale retta, velocità $\mathbf{v}_1$ e raggio vettore $P_1 - O$ sono perpendicolari:

$$(P_1 - O) \times \mathbf{v}_1 = 0.$$

Tenendo conto della (7'), per essere in P_1, $\mathbf{a} = \frac{1}{r_1}(P_1 - O)$ si ricava

$$\left(\frac{f}{r_1} - v_1^2\right)(P_1 - O) = f\mathbf{c}_1.$$

Da questa risulta che il raggio vettore $P_1 - O$ avrà il verso di $\mathbf{c}_1$ o il verso opposto a seconda che in P_1 risulta $f - r_1 v_1^2 \gtrless 0$; ed il modulo c_1 del vettore $\mathbf{c}_1$, il quale mediante la (7) risulta determinato dalle condizioni iniziali, è anche dato da

$$c_1 = \left| 1 - \frac{r_1 v_1^2}{f} \right|. \tag{8}$$

Si può ora determinare la forma della traiettoria riferendoci alla retta per O parallela a $\mathbf{c}_1$ ed orientata come $\mathbf{c}_1$. Se diciamo θ l'angolo che $P - O$, ossia $\mathbf{a}$, forma con $\mathbf{c}_1$, moltiplicando la (7) scalarmente per a si ricava

$$\mathbf{c} \wedge \mathbf{v} \times \mathbf{a} = f \cdot (c_1 \cos\theta - 1).$$

In base alla (5) si può anche scrivere

$$\mathbf{c} \wedge \mathbf{v} \times \mathbf{a} = \mathbf{c} \times \mathbf{v} \wedge \mathbf{a} = -\frac{c^2}{r}, \tag{9}$$

onde, confrontando e risolvendo rispetto ad r, ricaviamo

$$r = \frac{c^2}{f} \cdot \frac{1}{1 - c_1 \cos\theta}. \tag{10}$$

Si vede così che si tratta di una conica col fuoco in O avente per asse focale l'asse polare scelto, per parametro $p = \frac{c^2}{f}$ e per eccentricità $\varepsilon = c_1$.

Possiamo quindi concludere che *il vettore costante* $\mathbf{c}_1$ *col suo modulo determina l'eccentricità dell'orbita e con la sua direzione determina l'asse focale; ossia la retta degli aspsidi nel caso del moto kepleriano ellittico ed è precisamente diretto verso l'afelio.*

Si può osservare che il vettore costante $\mathbf{c}$ resta determinato anche variando la legge del moto giacchè la (5) è conseguenza della (4) che è valida per una qualunque legge di dipendenza della forza da r. Invece il vettore costante $\mathbf{c}_1$ è subordinato alla particolare legge di attrazione adottata, giacchè soltanto con questa si perviene alla (6).

In funzione delle costanti c e c_1 $(=\varepsilon)$ si può esprimere l'energia totale costante del sistema $H = T + U$. Infatti moltiplicando la (7') vettorialmente per $\mathbf{v}$ e ricordando la (5), risulta

$$f\mathbf{c}_1 \wedge \mathbf{v} = (f - rv^2)\mathbf{a} \wedge \mathbf{v} = \left(\frac{f}{r} - v^2\right)\mathbf{c},$$

da cui si ricava

$$\mathbf{c}_1 \wedge \mathbf{v} \times \mathbf{c} = \frac{1}{f}\left(\frac{f}{r} - v^2\right)c^2. \tag{11}$$

D'altra parte, moltiplicando la (7) scalarmente per $\mathbf{c}_1$ e per $\mathbf{a}$, si ricava

$$\mathbf{c} \wedge \mathbf{v} \times \mathbf{c}_1 = -f\mathbf{a} \times \mathbf{c}_1 + fc_1^2, \tag{12}$$
$$\mathbf{c} \wedge \mathbf{v} \times \mathbf{a} - f = f\mathbf{c}_1 \times \mathbf{a}.$$

Per la (9) quest'ultima diviene

$$-\frac{c^2}{r} + f = f\mathbf{c}_1 \times \mathbf{a},$$

onde, sostituendo in (12), otteniamo

$$\mathbf{c} \wedge \mathbf{v} \times \mathbf{c}_1 = \frac{c^2}{r} + fc_1^2 - f. \tag{13}$$

Dal confronto della (11) con la (13) risulta

$$v^2 - \frac{2f}{r} = f^2\,\frac{c_1^2 - 1}{c^2};$$

dove il primo membro, moltiplicato per la semimassa del punto P, dà l'energia totale $H = T + U$. Col segno di tale energia si discrimina se si tratta di orbita ellittica, iperbolica o parabolica $(\varepsilon > 1,\ \varepsilon < 1,\ \varepsilon = 0)$.