Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Luigi Beretta

Su un teorema di J. Shohat

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2,
Vol. **1** (1939), n.3, p. 218–220.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_3_218_0>

Su un teorema di J. Shohat (*).

Nota di LUIGI BERETTA (a Firenze).

Sunto. - *L'A. ritrova un teorema di* J. SHOHAT *sull'interpolazione di* LAGRANGE, *semplificando un procedimento di* G. GRÜNWALD *e* P. TURAN.

Sia $f(x)$ definita in $(-1, 1)$. Si prenda, in corrispondenza ad ogni n, l'ennupla di punti $x_1^{(n)}, x_2^{(n)} \ldots, x_n^{(n)}$ in tale intervallo, e sia:

$$\omega_n(x) = (x - x_1^{(n)})(x - x_2^{(n)}) \ldots (x - x_n^{(n)}).$$

Posto

$$l_k(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x - x_k^{(n)})\omega'_n(x_k^{(n)})}, \qquad (\sum_1^n {}_k l_k(x) \equiv 1),$$

la formula di interpolazione di LAGRANGE:

$$L_n[f(x)] = \sum_1^n {}_k f(x_k^{(n)}) l_k(x)$$

dà, come è noto, il polinomio di grado $n-1$, che nei punti $x_1^{(n)}$, $x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$, prende ordinatamente i valori $f(x_1^{(n)}), f(x_2^{(n)}), \ldots, f(x_n^{(n)})$.

Consideriamo

$$\sum_1^n {}_k |l_k(x)|:$$

preso il numero δ, $0 < \delta < 1$, indichiamo con A_n, B_n il massimo di tale funzione rispettivamente in $(-1, 1)$ e $(-1 + \delta, 1 - \delta)$. Per un teorema di FABER-BERNSTEIN, qualunque sia il sistema di punti scelto, si ha:

$$A_n > \frac{1}{12} \log n \ (^1).$$

D'altra parte, per lo studio del problema della convergenza uniforme di $L_n[f(x)]$ verso $f(x)$ in $(-1, 1)$ o $(-1 + \delta, 1 - \delta)$, è essenziale valutare l'ordine di grandezza di A_n o, rispettivamente, B_n, quando n tende all'infinito (²).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Matematico della R. Università di Firenze.

(¹) G. FABER, *Ueber interpolatorische Darstellung stetiger Funktionen*, « Jahresbericht der D. Math. Verein. », 23, (1914); S. BERNSTEIN, *Quelques remarques sur l'interpolation*, « Comm. Soc. Math. Charkow », 14, (1914).

(²) Per esempio dalla (1) si deduce (FABER, loc. cit.) che, qualunque sia il sistema di punti scelto, non si ha mai la convergenza uniforme per tutte le funzioni continue.

Migliore sarà tale valutazione e più vasta sarà la classe di funzioni per cui si potranno stabilire teoremi di convergenza [3].

J. SHOHAT [4] ha studiato per primo in generale il caso in cui i punti $x_k^{(n)}$ sono gli zeri dei polinomi ortogonali, ossia la successione $\{\omega_n(x)\}$ è definita a partire da una funzione $p(x) \geq 0$, R-integrabile in $(-1, 1)$, mediante la relazione:

$$\int_{-1}^{1} p(x)\omega_m(x)\omega_n(x)dx = 0, \qquad \text{per } m \neq n \tag{1}$$

Egli ha trovato il notevolissimo risultato che se

$$p(x) > m > 0, \qquad -1 \leq x \leq 1. \tag{3}$$

allora:

$$A_n = 0(n), \quad B_n = 0(\sqrt{n}).$$

Intendo esporre qui una dimostrazione estremamente semplice di tale teorema, che non mi risulta essere stata pubblicata, e che mi sembra costituire una notevole e naturale semplificazione di quella data da G. GRÜNWALD e P. TURAN [5].

Per dimostrare il primo punto, basterà far vedere che *nelle ipotesi* (2) *e* (3) *si ha*

$$|L_n[f(x)]| \leq c \cdot n$$

con c *costante assoluta, per tutte le funzioni* f(x) *per cui*

$$|f(x)| \leq 1, \quad -1 \leq x \leq 1 \text{ [6]}.$$

Ora si ha:

$$\int_{-1}^{1} L_n[f(x)]^2 dx \leq \frac{1}{m}\int_{-1}^{1} L_n[f(x)]^2 p(x) dx =$$

$$= \frac{1}{m}\sum_{1}^{n}{}_k f(x_k^{(n)})^2 \int_{-1}^{1} p(x) l_k^2(x) dx \leq \frac{1}{m}\int_{-1}^{1} p(x)dx = c_1,$$

(3) Per es. se $A_n = 0(\log n)$, come accade se $x_k^{(n)} = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$, ossia $\omega_n(x) = \cos(n \arccos x)$ (polinomio di TCHEBYSCHEFF di 1ª specie), allora si ha la convergenza uniforme per tutte le funzioni lipschitziane di ordine α positivo qualunque.

(4) J. SHOHAT, *On Interpolation*, « Annals of Mathematics », vol. 34 (1933), p. 130.

(5) G. GRÜNWALD e P. TURAN, *Ueber Interpolation*, « Ann. R. Sc. Norm. Sup. Pisa », 1938.

(6) Cfr. loc. cit., nota (5), p. 145.

perciò

$$\int_{-1}^{1} L_n[f(x)]^2 dx \leq c_1$$

e quindi

$$(4) \qquad \int_{-1}^{x} L_n[f(x)]^2 dx \leq c_1, \qquad -1 \leq x \leq 1,$$

da cui, per un notissimo teorema di MARKOFF-BERNSTEIN (7),

$$L_n[f(x)]^2 \leq c_1(2n-1)^2$$

e perciò

$$|L_n[f(x)]| \leq cn.$$

Analogamente, applicando sempre il teorema di MARKOFF-BERNSTEIN alla (4), segue:

$$|L_n[f(x)]| \leq c\sqrt{n}, \qquad \text{per } -1+\delta \leq x \leq 1-\delta.$$

(7) Cfr. S. BERNSTEIN, *Leçons sur les propriétés extrémales...*, « Coll. BOREL, sur la théorie des fonctions », 1926, p. 37.