Bollettino Unione Matematica Italiana

Ugo Broggi

Sui polinomi di Laguerre e su una limitazione di G. Szegö

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2, Vol. **1** (1939), n.3, p. 213–217.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_3_213_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1939.

Sui polinomi di Laguerre e su una limitazione di G. Szegö.

Note di U. BROGGI (a Strasburgo).

Sunto. - *Si deducono dalla formola nota*

$$\int_0^\infty e^{-ts}L_n(t)dt = \frac{1}{s}\left(\frac{s-1}{s}\right)^n$$

le proprietà fondamentali dei polinomi $L_n(t)$, *e che*

$$L_n(t) = \frac{e^{t/2}}{2\pi i}\int_{(C)} e^{itv}\left(\frac{v+i/2}{v-i/2}\right)^n \frac{dv}{v-i/2}$$

(*dove* C *è una curva chiusa racchiudente* $i/2$)

$$|L_n(t)| \leq e^{t/2}.$$

Dalla chiusura del sistema $\{e^{-t/2}L_n(t)\}$ *si deduce che, se*

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-ts}\varphi(t)dt \equiv 0,$$

$\varphi(t)$ *è generalmente nulla.*

Se è

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(e^{-t}t^n) = \sum_{h=0}^{n}(-)^h\binom{n}{h}\frac{t^h}{h!}$$

è anche, come osservava il TRICOMI [1] e come si vede agevolmente [2]

$$(1) \qquad \int_0^\infty e^{-ts}L_n(t)dt = \frac{1}{s}\left(\frac{s-1}{s}\right)^n. \qquad (R(s) > 0)\ (^1)$$

La (1) permette di dimostrare nel modo più immediato le proprietà fondamentali dei polinomi $L_n(t)$.

1. Si ha integrando per parti

$$\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-ts}L_n(t)dt = \int_0^\infty e^{-ts}\int_0^t L_n(u)du\,dt$$

(1) F. TRICOMI. *Trasf. di Laplace e polinomi di Laguerre*, « Rend. Lincei », XXI, (1935), pp. 232-239.

(2) È $\int_0^\infty e^{-ts}t^h dt = h!\,s^{-(h+1)}$, $\quad \frac{1}{s}\left(\frac{s-1}{s}\right)^n = \sum_{h=0}^{n}(-)^h\binom{n}{h}s^{-(h+1)}$.

e quindi, poichè

$$\int_0^\infty e^{-ts} L_{n+1}(t)dt = \frac{s-1}{s}\int_0^\infty e^{-ts} L_n(t)dt,$$

$$L_{n+1}(t) = L_n(t) - \int_0^t L_n(u)du.$$

Se ne deduce per ricorrenza

(2) $$L_{n+m}^{(m)}(t) = \sum_{h=0}^{m} (-)^h \binom{m}{h} L_n^{(m-h)}(t).$$

2. È $\frac{1}{s} = 1 - \frac{s-1}{s}$

$$\int_0^\infty e^{-ts} t L_n(t)dt = -\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s}\left(\frac{s-1}{s}\right)^n\right]$$

$$= \frac{2n+1}{s}\left(\frac{s-1}{s}\right)^n - \frac{n}{s}\left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1} - \frac{n+1}{s}\left(\frac{s-1}{s}\right)^{n+1} =$$

$$= \int_0^\infty e^{-ts}[(2n+1)L_n(t) - (n+1)L_{n+1}(t) - nL_{n-1}(t)]dt.$$

(3) $$(n+1)L_{n+1}(t) - (2n+1-t)L_n(t) + nL_{n-1}(t) = 0.$$

Se ne deduce, derivando due volte rispetto a t e tenendo presente la (2)

(4) $$tL''_n(t) + (1-t)L'_n(t) + nL_n(t) = 0.$$

3. Il sistema $\{e^{-t/2}L_n(t)\}$ è ortogonale e normalizzato. È

$$(-)^\varepsilon \int_0^\infty e^{-ts} t^\varepsilon L_n(t)dt = \frac{d^\varepsilon}{ds^\varepsilon}\left(\frac{1}{s}\left(\frac{s-1}{s}\right)^n\right).$$

Se $\varepsilon = 0, 1, \ldots n-1$, tutti i termini del secondo membro, in ciascuno dei quali figura come fattore una potenza positiva di $\frac{s-1}{s}$, si annullano se $s = 1$.

Se $\varepsilon = n$ ed $s = 1$, tutti i termini del secondo membro si annullano, meno il termine $\frac{n!}{s^{2n+1}}$, che assume il valore $n!$ Poichè il coefficiente di t^n in $L_n(t)$ è $\frac{(-)^n}{n!}$, si ha

$$\int_0^\infty e^{-t} L_n^2(t)dt = 1.$$

È dunque

$$\int_0^\infty e^{-t} L_m(t) L_n(t) dt = \begin{matrix} 0, \text{ se } m \neq n, \\ 1, \text{ se } m = n. \end{matrix}$$

4. Il sistema $\{e^{-t/2} L_n(t)\}$ è chiuso: se

(A) $$\int_0^\infty e^{-t} \Psi^2(t) dt < \infty,$$

(B) $$\int_0^\infty e^{-t} L_n(t) \Psi(t) dt = 0, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$\Psi(t)$ è generalmente nulla.

Si deduce intanto da (A) e dalla disuguaglianza di SCHWARTZ, che l'integrale di LAPLACE

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-ts} \Psi(t) dt$$

converge se $s = \frac{1}{2}$ e pertanto se $R(s) > \frac{1}{2}$. È infatti

$$\left(\int_0^\infty e^{-t(s-1/2)} e^{-t/2} \Psi(t) dt \right)^2 \leqq \int_0^\infty e^{-t(2s-1)} dt \int_0^\infty e^{-t} \Psi^2(t) dt.$$

$sF(s)$, olomorfa nel semipiano $R(s) > \frac{1}{2}$, vi ammette uno sviluppo in serie di potenze di $\frac{s-1}{s}$:

$$sF(s) = \sum_{n=0}^\infty c_n \left(\frac{s-1}{s} \right)^n, \qquad \overline{\lim} \, |c_n|^{\frac{1}{n}} \leqq 1.$$

E dunque anche

$$\Psi(t) \backsim \sum_{n=0}^\infty c_n L_n(t).$$

Se $c_n = 0$ è $F(s) = 0$. Per un noto teorema di LERCH [3], la funzione determinante $F(s)$ non può essere nulla in $R(s) > \frac{1}{2}$ senza che in $t > 0$ lo sia quasi dappertutto la sua generatrice $\Psi(t)$.

[3] Cfr. ad es. S. PINCHERLE, *Funzioni analitiche*, pag. 335.

5. È, se $t > 0$

$$|L_n(t)| \leq e^{t/2}.$$

È infatti per la formola d'inversione di RIEMANN, se

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-ts}\varphi(t)dt$$

converge nel semipiano $R(s) > \lambda$, ed è $\mu > \lambda$

$$f(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty e^{-st}\int_{\mu - i\infty}^{\mu + i\infty} e^{tu}f(u)du.. \text{ (}^4\text{)}$$

Per il teorema di LERCH prima ricordato, se $t > 0$ è anche

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mu - i\infty}^{\mu + i\infty} e^{tu}f(u)du$$

quasi dappertutto; e qualunque sia $t > 0$, se $\varphi(t)$ è continua in ogni punto del semiasse reale positivo.

È dunque se $t > 0$, $\mu = \frac{1}{2}$, $u = \frac{1}{2} + iv$

$$L_n(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2} - i\infty}^{\frac{1}{2} + i\infty} e^{tu}\left(\frac{u-1}{u}\right)^n \frac{du}{u}$$

$$= \frac{e^{t/2}}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itv}\left(\frac{v + i/2}{v - i/2}\right)^n \frac{dv}{v - i/2}.$$

Poichè è $t > 0$ e $\frac{1}{v - i/2}\left(\frac{v + i/2}{v - i/2}\right)^n$ è regolare nei punti dell'asse reale e nulla all'infinito, può scriversi (5)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itv}\left(\frac{v + i/2}{v - i/2}\right)^n \frac{dv}{v - i/2} = \int_C e^{itv}\left(\frac{v + i/2}{v - i/2}\right)^n \frac{dv}{v - i/2}$$

dove C è una circonferenza di centro $i/2$. È

$$\left| e^{-t/2}\left(\frac{v + i/2}{v - i/2}\right)^n \right| = 1,$$

(4) Cfr. ad es. S. PINCHERLE, l. c., pag. 330.

(5) E. LINDELÖF, *Le calcul des résidus*, pag. 47.

e pertanto anche

$$e^{-t/2}|L_n(t)| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\Theta = 1.$$

Si ritrova in sostanza, come conseguenza immediata di relazioni fondamentali, la disuguaglianza

$$|L_n(t)| < e^{t/2} \quad (t > 0)$$

che G. SZEGÖ, cui essa risale [6], fonda su calcoli espressamente escogitati per dimostrarla.

6. Nel § 4 la chiusura del sistema $\{e^{-t/2}L_n(t)\}$ è stata dedotta da ciò che, se in $R(s) > \mu$ è

$$(5) \qquad f(s) = \int_0^\infty e^{-ts}\varphi(t)dt = 0$$

$\varphi(t)$ è quasi dappertuito nulla. Sussiste la proposizione reciproca: se vale la (5), $\varphi(t)$ è quasi dappertutto nulla poichè il sistema $\{e^{-t/2}L_n(t)\}$ è chiuso.

Sia $\alpha > 0$, $\beta > 0$. $\alpha - \beta = 2\mu$.

$(s+\beta)f(s)$ ammette in $R(s) > \mu$ uno sviluppo in serie di potenze di $\frac{s-\alpha}{s+\beta}$, di coefficienti $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ tali che $\lim |\alpha_n|^{\frac{1}{n}} \leqq 1$.

Poichè come si vede sens' altro

$$\frac{1}{s-\beta}\left(\frac{s-\alpha}{s-\beta}\right)^n = \int_0^\infty e^{-t(s+\beta)}L_n[(\alpha+\beta)t]dt$$

è

$$e^{t\beta}\varphi(t) \backsim \sum_0^\infty \alpha_n L_n[(\alpha+\beta)t].$$

Se è $f(s) \equiv 0$ in $R(s) > \mu$ è $\alpha_n = 0$, e poichè il sistema $[e^{-t/2}L_n(t)]$ è chiuso [7], è quasi dappertutto $\varphi(t) = 0$.

[6] G. SZEGÖ, *Ein Beitrag zur Theorie der Polynome von* LAGUERRE *und* JACOBI. « Math. Zeitschrift », vol. I (1918), pp. 341-356, § 2.

[7] Cfr. ad es. G. VITALI e G. SANSONE, *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*, vol. II, pp. 208-210.