
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

SANDRO FAEDO

Sulla rappresentazione sul piano doppio di due superficie razionali del quarto ordine

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2,
Vol. 1 (1939), n.3, p. 206–212.

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_3_206_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_3_206_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Sulla rappresentazione sul piano doppio di due superficie razionali del quarto ordine.

Nota di S. FAEDO (a Roma).

Sunto. - *Si studiano le proiezioni sul piano doppio delle superficie $F_4(2)$ e $F_4(3)$ di NOETHER, facendo la genesi delle corrispondenti singolarità per la curva di diramazione; si chiarisce una apparente contraddizione che qui si presenta e si confrontano le singolarità delle due superficie.*

1. Se F è una superficie algebrica con un punto doppio P , si può rappresentare la falda che ha origine in P su un piano doppio e la singolarità che viene ad acquistare la curva di diramazione γ è atta a definire il punto P della superficie.

In particolare se P è un tacnodo oppure un punto doppio che ha infinitamente vicino un tacnodo, la γ viene ad avere rispettivamente un punto quadruplo oppure due punti tripli infinitamente vicini.

M. NOETHER ⁽¹⁾ ha dato due superficie razionali del 4° ordine, $F_4(2)$ e $F_4(3)$, che possiedono un punto doppio P con infinitamente vicino un tacnodo P_1 e che si rappresentano rispettivamente sul piano mediante $C_7(A_1^3, A_2^2, \dots, A_{10}^2)$ e $C_9(A_1^3, \dots, A_8^3, A_9^2, A_{10})$ con una cubica fondamentale.

Se si proietta la $F_4(2)$ da P sopra un piano doppio, questo viene ad avere una sestica di diramazione con un punto quadruplo P_1' . Ciò è conforme a quanto si è precedentemente osservato, in quanto che nella proiezione al punto doppio P viene a corrispondere una retta per P' e il tacnodo P viene proiettato nel punto P_1' quadruplo per γ .

Se invece si proietta da P la $F_4(3)$ si ottiene un piano doppio con una sestica di diramazione che possiede due punti tripli infinitamente vicini $P'P_1'$.

Al punto P di $F_4(3)$ corrisponde sul piano doppio la retta $P'P_1'$; ma la presenza dei due punti $P'P_1'$ porterebbe a concludere che sulla $F_4(3)$ si trovino successivamente a P ancora un punto doppio e un tacnodo infinitamente vicini.

In questa nota viene chiarita questa apparente contraddizione e si studia la proiezione delle $F_4(2)$ e $F_4(3)$ sul piano doppio, con

(1) M. NOETHER, *Ueber die rationalen Flächen vierter Ordnung*, « Math. Ann. », 1889, XXXIII, p. 546. Per comodità tipografica adopero la scrittura $F_4(2)$ e $F_4(3)$ invece dell'abituale $F_4^{(2)}$ e $F_4^{(3)}$.

particolare riguardo a quella della $F_4(3)$. Tale studio viene collegato a una ricerca ⁽²⁾ recentemente eseguita su una classe di superficie che generalizza appunto la $F_4(3)$ di NOETHER.

Si ottiene che al punto doppio e alla retta doppia infinitesima che costituiscono il tacnodo P_1 corrispondono successivamente due punti PP_1' , infinitamente vicini, doppi per la curva di diramazione. Ma nell'intorno di P_1' questa viene a possedere una retta infinitesima di punti doppi, proveniente da una serie di corde improprie della superficie uscenti da P .

La singolarità di γ è quindi costituita da *un punto doppio e uno quadruplo successivi*, che per il principio di scaricamento di ENRIQUES ⁽³⁾ si riduce a due punti tripli infinitamente vicini.

Si dimostra inoltre che le $F_4(2)$ e $F_4(3)$ sono caratterizzate da questa circostanza: per la $F_4(2)$ la retta PP_1 non appartiene alla superficie, mentre invece per la $F_4(3)$ essa sta sulla superficie. Ne risulta che se si considerano queste singolarità sopra una superficie di ordine maggiore, nel primo caso il piano tacnodale ⁽⁴⁾ di P_1 non passa per P , mentre invece ciò accade nel secondo. La distinzione delle due singolarità è quindi soltanto di natura proiettiva. Ciò è in accordo con quanto ha recentemente dimostrato F. CONFORTO ⁽⁵⁾, ossia che dal punto di vista differenziale la singolarità della $F_4(3)$ è un caso particolare della $F_4(2)$.

2. Sia F una superficie algebrica dotata di un punto doppio P . Da un punto generico M dello spazio si proietti la falda della superficie che ha origine in P sopra un piano doppio π , che avrà una curva di diramazione γ . Al punto P corrisponderà un punto P' di γ . Si scelga M in guisa che il punto P' non sia fondamentale, ossia che la retta MP non appartenga alla superficie.

Ogni trasformazione birazionale, che non abbia elementi fondamentali nell'intorno di P' , trasforma π in una superficie che possiede una singolarità dello stesso tipo di quella che ha in P la F .

⁽²⁾ S. FAEDO, *Sulle superficie razionali a sezioni iperplane canoniche...* « Rend. R. Acc. Lincei », vol. XXVII, s. VI, 1938, p. 197-202; 276-280.

⁽³⁾ ENRIQUES-CHISNI, *Teoria geometrica delle equazioni*, vol. II. L. IV, p. 431.

⁽⁴⁾ Con *piano tacnodale* s'intende il piano per il punto doppio di un tacnodo che contiene la retta doppia infinitesima. Tale piano si può definire, senza ricorrere a punti infinitamente vicini, sciogliendo il tacnodo con una trasformazione quadratica che lo abbia come punto fondamentale.

⁽⁵⁾ F. CONFORTO, *Sopra le singolarità delle superficie $F_4(2)$ ed $F_4(3)$ di NOETHER*, « Rend. R. Accad. Lincei », vol. XXIX (VI); Nota I, pag. 20-24; Nota II, pag. 43-48.

Infatti la singolarità della F in P può essere analizzata e definita mediante un numero finito di trasformazioni quadratiche, le quali possono ugualmente eseguirsi sul piano doppio.

Ne risulta quindi che la singolarità di P' per la curva di diramazione contiene tutti gli elementi sufficienti a caratterizzare il punto doppio P di F .

Esaminiamo alcuni casi semplici di punti doppi di una superficie.

Se P è un punto doppio ordinario la γ viene ad acquistare un punto doppio nodale. Infatti la superficie polare prima di M rispetto ad F passa semplicemente per P ed incontra la F in una curva che ha in P un punto doppio.

Se invece P è un tacnodo, la prima polare di M incontra F in una curva che ha in P un punto quadruplo e quindi la curva di diramazione viene a possedere un punto quadruplo.

Se P è un punto doppio cui è infinitamente vicino un tacnodo, la γ viene ad avere un punto doppio al quale è infinitamente vicino un punto quadruplo, ossia, per il principio di scaricamento di ENRIQUES, due punti tripli infinitamente vicini.

Viceversa queste singolarità della γ caratterizzano il punto P . Questo fatto si può verificare per un particolare modello di superficie, che sia col piano doppio in corrispondenza birazionale, priva di elementi fondamentali nell'intorno di P' .

Si riferisca π ad un sistema di coordinate cartesiane xy con origine in P' . Se $f(x, y) = 0$ è l'equazione di γ , la superficie

$$z^2 = f(x, y)$$

è in corrispondenza birazionale con π e possiede nel punto $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ una singolarità dello stesso tipo di quella che aveva la F in P .

3. Consideriamo la superficie $F_4(2)$ di NOETHER, che è rappresentata sul piano dal sistema di

$$(I) \quad C_7(A_1^3, A_2^3, \dots, A_{10}^2),$$

in cui A_1, \dots, A_{10} stanno sopra una cubica Γ_3 fondamentale. Poiché il sistema (I) ha grado 4, la $F_4(2)$ è una superficie del 4° ordine. Alle $C_7 \equiv \Gamma_3 + C_4(A_1^2, A_2, \dots, A_{10})$ corrisponde la stella di sezioni piane per un punto doppio P e al fascio di $C_7 \equiv 2\Gamma_3 + C_1(A_1)$ il fascio di piani per P e per un tacnodo P_1 infinitamente vicino a P .

La $F_4(2)$ possiede quindi due punti doppi successivi P e P_1 ed ha nell'intorno di P_1 una retta doppia infinitesima.

Nella proiezione di $F_4(2)$ da P su un piano doppio π , a P_1 corrisponde un punto doppio di γ , nel cui intorno c'è una retta infi-

infinitesima di punti doppi per γ , che viene così ad avere un punto quadruplo P' .

Il piano doppio π si rappresenta sul piano semplice mediante

$$C_4(A_1^2 A_2, \dots, A_{11})$$

con A_1, \dots, A_{11} sopra Γ_3 .

A queste curve di genere $p = 2$ corrispondono le rette di π . La curva di diramazione è quindi di ordine $2p + 2 = 6$.

Al fascio di $C_4 = \Gamma_3 + C_4(A_1)$ corrisponde su π un fascio di rette doppie razionali, ossia le rette per un punto P' quadruplo per γ .

Si pensi P' come un punto doppio nel cui intorno c'è una retta infinitesima di punti doppi per γ : a questa retta viene a corrispondere sul piano semplice la g_2^4 segata su Γ_3 dalle rette per A_1 .

Questo risultato è in accordo con quanto si è osservato in 2. Nella proiezione a P viene a corrispondere la retta intersezione di π col piano tangente in P e al tacnodo infinitamente vicino a P corrisponde il punto quadruplo per γ .

4. La superficie $F_4(3)$ di NOETHER è rappresentata sul piano da

$$C_9(A_1^3, \dots, A_8^3, A_9^2, A_{10})$$

con A_1, \dots, A_{10} sopra una cubica Γ_3 fondamentale. È una superficie del 4° ordine con un punto doppio P e le sezioni piane per P sono rappresentate dalla rete di $C_9 = \Gamma_3 + C_9(A_1^2, \dots, A_8^2, A_9)$. Il punto A_{10} rappresenta una retta a di $F_4(3)$ passante per P e i piani per essa segano $F_4(3)$ in cubiche, che hanno in P questa retta come tangente di flesso.

La singolarità di $F_4(3)$ è costituita da due punti doppi successivi PP_1 e da una retta doppia infinitesima nell'intorno di P_1 (si prova ciò segnando la $F_4(3)$ con quadriche per PP_1). La retta PP_1 (ossia la retta a) è incidente a questa retta doppia infinitesima, che viene ad essere contenuta nel piano tangente alla $F_4(3)$ in P .

Per procedere allo studio della proiezione di $F_4(3)$ dal punto P sul piano doppio richiamiamo dapprima alcuni risultati relativi a una classe di superficie razionali rappresentate sul piano dal sistema di

$$(II_p) \quad C_{2p}(A_1^p, \dots, A_8^p, A_9^{p-1}, A_{10})$$

con $\Gamma_3(A_1, \dots, A_{10})$. Per $p = 3$ si ottiene la $F_4(3)$ di NOETHER. Queste sono superficie F_{2p-2} a sezioni iperpiane canoniche, di ordine $2p-2$ appartenenti ad S_p e che possiedono un punto doppio. Poichè staccando dal sistema C_{2p} la cubica Γ_3 si ottiene un sistema aggiunto $C_{2(p-1)}(A_1^{p-1}, \dots, A_8^{p-1}, A_9^{p-2}, B)$ (con B punto fisso di Γ_3) che ha

ancora Γ_3 come fondamentale e così successivamente, si riteneva ⁽⁶⁾ che questa superficie possedesse una singolarità costituita da $p - 1$ punti doppi infinitamente vicini, l'ultimo dei quali tacnodo. Così si spiegava inoltre come per successive proiezioni dal punto doppio si passa dalla F_{2p-2} di S_p alla F_{2p-4} di S_{p-1} rappresentata dal sistema (II_{p-1}) e così successivamente sino a giungere alla $F_4(3)$ di NOETHER in S_3 .

Si dimostra ⁽⁷⁾ invece che la F_{2p-2} possiede due punti doppi successivi P, P_1 e una retta doppia infinitesima nell'intorno di P_1 .

Ancora la retta PP_1 appartiene alla superficie e il piano tangente nel punto (uniplanare) P contiene questa retta e la retta doppia infinitesima dell'intorno di P_1 .

Nella proiezione di F_{2p-2} da P in un S_{p-1} , il punto P_1 va in un punto doppio P' di una F_{2p-4} , la retta doppia infinitesima si proietta in un punto doppio P'_1 , nell'intorno del quale si ricrea una nuova retta doppia infinitesima per la presenza di una serie di corde improprie della F_{2p-2} uscenti da P .

Quando si proietta la $F_4(3)$ da P sopra un piano doppio π accade un fatto analogo.

Il punto P_1 si proietta in un punto P' doppio per la curva di diramazione γ e la retta doppia infinitesima dell'intorno di P_1 in un punto doppio P'_1 ; nell'intorno del 1° ordine di P'_1 sta una retta infinitesima di punti doppi per γ : la curva di diramazione viene quindi a possedere un *punto doppio cui è infinitamente vicino un punto quadruplo*, ossia, per il principio di scaricamento, *due punti tripli infinitamente vicini*.

Per provare ciò mostreremo che ora alle coppie di una certa g_2^1 segata su Γ_3 non corrisponde l'intorno del punto P' come avveniva per $F_4(2)$, bensì l'intorno di un punto P'_1 , infinitamente vicino a P' .

Il piano doppio si rappresenta su quello semplice col sistema

$$C_6(A_1^2, \dots, A_8^2, A_9, B), \text{ con } \Gamma_3(A_1, \dots, A_9, B).$$

Le sezioni di $F_4(3)$ con quadriche per PP_1 sono rappresentate da $C_{12}(A_1^4, \dots, A_8^4, A_9^3)$; esse sono curve L_8 dell'ottavo ordine con tre punti doppi successivi PP_1P_2 . Nella proiezione da P queste curve si proiettano *semplicemente* su π in L_6 . Il fascio di rette di π per P' , rappresentato sul piano semplice da

$$\Gamma_3 + \Gamma_3(A_1, \dots, A_8),$$

⁽⁶⁾ Cfr. ad es. G. FANO, *Osservazioni intorno al sistema aggiunto puro...* « Rend. Circ. Mat. di Palermo », to. XL, p. 29, 1915.

⁽⁷⁾ S. FAEDO, loc. cit. in (2).

incontra le L_3 in $3 \cdot 12 - 4 \cdot 8 = 4$ punti variabili, ossia queste L_3 hanno in P' un punto doppio corrispondente al punto doppio P_1 delle L_8 .

Una conica generica del piano doppio si rappresenta con

$$C_{12}(A_1^4, \dots, A_8^4, A_9^2, B_2^2)$$

e quelle fra esse che passano per P' si spezzano in Γ_3 e in $C_9(A_1^3, \dots, A_8^3, A_9, B, D)$, con D punto fisso di Γ_3 .

Queste curve incontrano rispettivamente le L_3 in 12 e 10 punti variabili.

Dal sistema ∞^3 delle coniche di π per P' si stacca la rete per P' ed un punto P_1' infinitamente vicino, rappresentata da

$$2\Gamma_3 + C_6(A_1^2, \dots, A_8^2).$$

Queste coniche incontrano le L_3 in $6 \cdot 12 - 8 \cdot 8 = 8$ punti variabili, quindi il punto P_1' è doppio per le L_3 .

Poichè le $C_6(A_1^2, \dots, A_8^2)$ e le $C_{12}(A_1^4, \dots, A_8^4, A_9^2)$ segano su Γ_3 la medesima g_2^4 , risulta che all'intorno di P_1' sul piano doppio corrisponde la suddetta g_2^4 su Γ_3 .

Nel piano che rappresenta la $F_4(3)$, le $C_6(A_1^2, \dots, A_8^2)$ corrispondono all'intersezione della superficie con i conici quadrici Q tangenti ad essa lungo la retta a e aventi vertice in P . Alla g_2^4 segnata dalle C_6 su Γ_3 corrisponde il fatto seguente: un cono Q incontra la $F_4(3)$, fuori di a , in due punti $M_1 M_2$ infinitamente vicini a P . Tutti i conici per M_1 hanno a comune la generatrice PM_1 e il punto M_2 che sta perciò su PM_1 . La retta $PM_1 M_2$ è la posizione limite di una corda per due punti T_1, T_2 , quando T_1 e T_2 tendono ai punti infinitamente vicini a P rappresentati dalla coppia della g_2^4 relativa al cono Q . Quindi $PM_1 M_2$ è una corda impropria di g_2^4 relativa alla retta doppia infinitesima dell'intorno di P_1 . Si ha una serie di corde improprie della superficie uscenti da P e che incontrano il piano doppio nell'intorno di P_1' .

Si osservi ora che la prima polare di P rispetto a $F_4(3)$ è una superficie che, analogamente alle quadriche per PP_1 , passa semplicemente per P e P_1 .

Dalle considerazioni fatte segue che la curva di diramazione di π possiede un punto doppio P' cui è infinitamente vicino un punto doppio P_1' , nel cui intorno sta una retta infinitesima di punti doppi per γ , che proviene da una serie di corde improprie della $F_4(3)$ uscenti da P : γ ha quindi un punto doppio con successivo uno quadruplo, singolarità che si scarica in due punti tripli infinitamente vicini.

5. Nella proiezione di $F_4(3)$ al punto P viene a corrispondere sul piano doppio la retta $P'P_1'$ e al tacnodo P_1 corrispondono i due punti tripli infinitamente vicini di γ .

D'altra parte s'era visto in P che a un tacnodo corrisponde un punto quadruplo della curva di diramazione.

Quest'apparente contraddizione si chiarisce col fatto che la retta PP_1 appartiene alla $F_4(3)$, ciò che si era dovuto esplicitamente escludere nelle considerazioni svolte in 2. Si ha inoltre:

Se una superficie F del 4° ordine con un punto doppio P e un tacnodo P_1 successivi si proietta da P su un piano doppio, con una curva di diramazione che possieda due punti tripli infinitamente vicini, necessariamente la retta PP_1 appartiene ad F .

Infatti in caso contrario la F verrebbe ad avere un punto doppio P e successivamente un punto doppio e un tacnodo (⁸).

Viceversa se una superficie F del 4° ordine con un punto doppio P e un tacnodo P_1 infinitamente vicino contiene la retta PP_1 , il fascio di piani per PP_1 sega la F in cubiche che hanno in P questa retta come tangente di flesso; proiettando tale superficie da P su un piano doppio, questo viene ad avere una sestica di diramazione con due punti tripli infinitamente vicini. Questa superficie è quindi la $F_4(3)$ di NOETHER.

Ne segue che le *singularità della $F_4(2)$ e $F_4(3)$ si differenziano per il solo fatto che la retta PP_1 , nel primo caso non appartiene e nel secondo appartiene alla superficie.*

Considerando queste due singularità indipendentemente dalle due superficie del 4° ordine su cui le abbiamo studiate, possiamo dire che esse si diversificano soltanto *proiettivamente: nel secondo caso il piano tacnodale* (⁹) *passa per il punto P , ciò che invece non accade per il primo.*

(⁸) Una superficie non può possedere tale singularità. Cfr. L. GUSSENHOVEN, *Sur les points doubles infiniment voisins d'une surface algébrique*. « Mathesis », to. XLIX, p. 288, 1935. Ciò si può vedere anche proiettando, da un punto generico, la falda che ha origine in P sopra un piano doppio. La curva di diramazione ha due punti doppi e uno quadruplo successivi. Questo si scarica di guisa che il tacnodo non può andare oltre l'intorno del 1° ordine di P .

(⁹) Cfr. nota (4).