
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

UGO MORIN

Un problema d'analisi indeterminata di terzo grado

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2,
Vol. 1 (1939), n.3, p. 201–205.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_3_201_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1939.

Un problema d'analisi indeterminata di terzo grado.

Nota di UGO MORIN (a Padova).

Sunto. - Dell'equazione $x_1^3 + \dots + x_r^3 = 0$ si assegna per r pari la soluzione completa mediante numeri razionali.

Dell'ultimo teorema di FERMAT è noto il caso particolare, considerato da EULERO (1), che l'equazione $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ non ammette alcuna soluzione costituita da numeri interi (tutti diversi da zero). Invece dell'equazione

$$(1) \quad x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0,$$

VIETA ha date alcune soluzioni intere, ed EULERO ne ha data la soluzione completa. Per soluzione *completa* di un'equazione del tipo (1) intendo l'espressione di tutte le soluzioni razionali della (1) con funzioni razionali, a coefficienti razionali, di un insieme di parametri razionali. Da tutte le soluzioni razionali si ottengono poi tutte le soluzioni intere, moltiplicandole rispettivamente per degli opportuni fattori razionali.

La soluzione completa della (1) è stata semplificata da BINET, e ritrovata in modo semplice dall'HERMITE, sfruttando la razionalità della superficie cubica, dello spazio lineare S_3 , rappresentata dall'equazione (1); analogamente come ha fatto più tardi il KLEIN (2) per la soluzione dell'equazione pitagorica.

(1) Per la bibliografia completa dell'argomento si consideri DICKSON L. E., *History of the theory of numbers* [G. E. Stechert & Co., New York 1924], t. II, cap. XXI, ove sono citati lavori di DIOPHANTUS, VIETA, EULERO, FERMAT, BINET, HERMITE, GRASSMANN, KÜHNE, FUJWARA, OSBORN, MARTIN e molti altri.

(2) KLEIN F., *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* [Julius Springer, Berlin 1929], t. III, pag. 49.

In questa Nota studio l'equazione

$$(2) \quad x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_r^3 = 0,$$

della quale, per particolari valori di $r > 4$ sono conosciute alcune soluzioni intere. Di essa dò per r pari la soluzione completa, mentre per r dispari riesco a dare delle soluzioni che dipendono da $r-1$ parametri razionali, ma che non esauriscono tutte le soluzioni razionali. La differenza tra i due casi dipende da ciò, che dell'ipersuperficie cubica Γ dello spazio lineare S_{r-1} (priva di punti doppi) rappresentata dall'equazione (2) riesco a dare, per r pari, una rappresentazione *birazionale* nell' S_{r-2} , mentre per r dispari riesco a darne soltanto una rappresentazione *unirazionale* (cioè mediante equazioni parametriche razionali ma non razionalmente invertibili).

Si constata così, per $r=5$, un interessante legame tra la (presunta) irrazionalità dell'ipersuperficie cubica generale dell' S_4 e la (presunta) impossibilità di dare della (2) la soluzione completa.

1. Supponiamo che nella (2) sia r pari, cioè $r=2n$. Allora l'equazione si può scrivere

$$(3) \quad \sum_1^n (x_j + x_{n+j})(x_j^2 - x_j x_{n+j} + x_{n+j}^2) = 0,$$

Ricordiamo della radice cubica di -1 , $\varepsilon = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, le immediate proprietà⁽³⁾: $\varepsilon^2 = -1$, $\varepsilon \bar{\varepsilon} = 1$, $\varepsilon^2 = -\bar{\varepsilon}$, $\varepsilon + \bar{\varepsilon} = 1$, $\bar{\varepsilon} - \varepsilon = i\sqrt{3}$, ecc.. Le equazioni

$$(4) \quad \begin{cases} x_{n+1} = \varepsilon x_1, \\ \dots \\ x_{n+n} = \varepsilon x_n. \end{cases} \quad (4') \quad \begin{cases} x_{n+1} = \bar{\varepsilon} x_1, \\ \dots \\ x_{n+n} = \bar{\varepsilon} x_n, \end{cases}$$

definiscono nello spazio lineare $S_{2n-1}(x_1, \dots, x_{2n})$ due spazi lineari S_{n-1} e \bar{S}_{n-1} , indipendenti e complesso coniugati, i quali appartengono totalmente all'ipersuperficie cubica Γ di equazione (3). Questo fatto costituisce una particolarità proiettiva della Γ (poichè l'ipersuperficie cubica generale dell' S_{2n-1} non possiede S_{n-1} totali), che ha come conseguenza la razionalità della Γ . Infatti essa è riferita birazionalmente all'insieme razionale delle rette dell' S_{2n-1} incidenti i due spazi S_{n-1} e \bar{S}_{n-1} .

2. Un punto P di coordinate razionali (X_1, \dots, X_{2n}) appartenga alla Γ . La retta che passa per P ed è incidente gli spazi coniu-

(3) Come d'uso il numero complesso coniugato di un numero a verrà indicato con \bar{a} .

Se il punto è reale potremo disporre di λ e μ in modo che le sue coordinate siano reali. Eguagliando i secondi membri delle (10) coi complesso coniugati, si ottiene

$$(11) \quad \begin{cases} (\lambda - \bar{\mu})u_j + (\mu - \bar{\lambda})\bar{u}_j = 0, \\ (\lambda - \bar{\mu})u_j\varepsilon + (\mu - \bar{\lambda})\bar{u}_j\varepsilon = 0, \end{cases}$$

da cui, poichè $\left| \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \right| \neq 0$, $(\mu - \bar{\lambda})\bar{u}_j = 0$, ed infine, poichè almeno un $u_j \neq 0$, $\mu = \bar{\lambda}$.

Dunque un generico punto P reale della retta $(P_1 \bar{P}_1)$ ha le coordinate espresse dalle

$$(12) \quad \begin{cases} x_j = \lambda u_j + \bar{\lambda} \bar{u}_j, \\ x_{n+j} = \lambda \varepsilon u_j + \bar{\lambda} \varepsilon \bar{u}_j, \end{cases} \quad (j = 1, \dots, n).$$

Se vogliamo che il punto P appartenga alla Γ di equazione (3), il parametro λ deve soddisfare all'equazione

$$(13) \quad [\lambda(1 + \varepsilon) \sum_1^n u_i^2 \bar{u}_i] + [\bar{\lambda}(1 + \bar{\varepsilon}) \sum_1^n \bar{u}_i u_i^2] = 0,$$

cioè deve rendere la prima parentesi immaginaria pura (affinchè la somma colla coniugata dia zero). Ciò si realizza, tenuto conto che $\varepsilon(1 + \varepsilon) = -i\sqrt{3}$, ponendo

$$(14) \quad \lambda = \varepsilon \sum_1^n u_i \bar{u}_i^2.$$

Le coordinate del punto P della Γ , tenute conto nelle (12) della (14) sono

$$(15) \quad \begin{cases} x_j = \varepsilon u_j \sum_1^n u_i \bar{u}_i^2 + \bar{\varepsilon} \bar{u}_j \sum_1^n \bar{u}_i u_i^2, \\ x_{n+j} = -\bar{\varepsilon} u_j \sum_1^n u_i \bar{u}_i^2 - \varepsilon \bar{u}_j \sum_1^n \bar{u}_i u_i^2. \end{cases}$$

Se nelle (15) facciamo per le u_i la posizione (8) e scriviamo

$$(16) \quad \begin{cases} v_{ij} = y_i y_j + 3z_i z_j + 3(y_i z_j - z_i y_j), \\ v'_{ij} = -(y_i y_j + 3z_i z_j) + 3(y_i z_j - z_i y_j), \\ v_{ii} = -v'_{ii} = v_i = y_i^2 + 3z_i^2, \end{cases}$$

esse si trasformano nelle

$$(17) \quad \begin{cases} x_j = \sum_1^n v_i v_{ji}, \\ x_{n+j} = \sum_1^n v_i v'_{ji}, \end{cases}$$

che forniscono tutte le soluzioni razionali della (2).

Se in particolare è $u_n = 0$, dalle (15) si ricava $x_n = x_{2n} = 0$. Quindi se vogliamo fare astrazione da queste soluzioni, improprie rispetto al valore di $r = 2n$, possiamo supporre $u_n \neq 0$, cioè $y_n = 1$ e $z_n = 0$ (n. 2).

Con queste convenzioni le (17) danno una rappresentazione birazionale della Γ nello spazio affine S_{2n-2} , nel quale $y_1, \dots, y_{n-1}, z_1, \dots, z_{n-1}$ sono coordinate di punto. In essa ai punti reali (razionali) della Γ corrispondono punti reali (razionali) dell' S_{2n-2} : e viceversa.

Le equazioni (17) sono, con qualche cambiamento formale, identiche a quelle date da BINET per $2n = 4$.

4. Supponiamo ora nella (2) r indifferentemente pari o dispari, purchè maggiore di tre. Con le posizioni

$$(18) \quad \begin{cases} x_3 - x_1 = y_1, & x_4 - x_2 = y_2, \\ x_3 + x_1 = y_3, & x_4 + x_2 = y_4, \end{cases}$$

la (2) si trasforma nella

$$(19) \quad 3y_3y_1^2 + 3y_4y_2^2 + \varphi_3 = 0,$$

dove $\varphi_3 \equiv y_3^3 + y_4^3 + x_5^3 + \dots + x_r^3$.

Con le ulteriori posizioni

$$(20) \quad y_3 = z_3^2, \quad y_4 = -z_4^2,$$

e la scrittura $\psi_3 \equiv z_3^6 - z_4^6 + x_5^3 + \dots + x_r^3$, la (19) si trasforma nella

$$(21) \quad 3z_3^2y_1^2 - 3z_4^2y_2^2 + \psi_3 = 0.$$

La (21) è identicamente soddisfatta se poniamo, z_2 essendo un parametro arbitrario.

$$(22) \quad y_1 = \frac{\psi_3 - 3z_4^2}{6z_2z_3}, \quad y_2 = \frac{\psi_3 + 3z_3^2}{6z_2z_4}.$$

Le (20) e (22) costituiscono una soluzione *razionale* della (19) cioè, attraverso le (18), della (2). Si tratta di una rappresentazione *unirazionale* della Γ nell' S_{r-2} ($z_2, z_3, z_4, x_5, \dots, z_r, \dots, x_r$) poichè, in causa del radicale quadratico introdotto con le posizioni (20), ad un punto della Γ corrispondono *due* punti dell' S_{r-2} . In questa rappresentazione unirazionale, ad un punto razionale dell' S_{r-2} corrisponde un punto razionale della Γ , ma vi sono punti razionali della Γ che provengono da punti non razionali dell' S_{r-2} . La (presunta) impossibilità di scrivere della (2), per r dispari, delle equazioni parametriche razionalmente invertibili, ha dunque per conseguenza la (presunta) impossibilità di dare della (2), per r dispari, la soluzione completa.