BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA
ITALIANA

MAURO PICONE

L'estremo inferiore di un certo funzionale

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2, Vol. **1** (1939), n.3, p. 198–199.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_3_198_0>

L'estremo inferiore di un certo funzionale.

Nota di MAURO PICONE (a Roma).

Sunto. - *Si calcola l'estremo inferiore del seguente funzionale*

$$\int_A \left| \int_B K(x, y)\varphi(y)dy - f(x) \right|^2 dx,$$

dello spazio hilbertiano.

Siano A e B due dominii misurabili (di misura finita o no) di due spazî, dei quali diremo, rispettivamente, p e q le dimensioni, x e y due punti variabili, dx e dy gli elementi di misura; (A, B) il dominio dello spazio a $p+q$ dimensioni, luogo dei punti le cui coordinate si ottengono, al variare di x in A e di y in B, prendendo insieme quelle di x e quelle di y; $K(x, y)$ un'assegnata funzione, reale o complessa, di norma sommabile nel dominio (A, B); $f(x)$ una funzione, pur essa assegnata, reale o complessa, di norma sommabile nel dominio A. La lettura del manoscritto della precedente Nota di L. AMOROSO [1] mi ha suggerito di determinare, in tutta generalità, l'estremo inferiore del funzionale

$$I[\varphi] = \int_A \left| \int_B K(x, y)\varphi(y)dy - f(x) \right|^2 dx,$$

nella totalità Γ delle funzioni $\varphi(y)$ di norma sommabile in B.

Detti $[u_k(x)]$, $[v_k(y)]$ i due sistemi (di funzioni di norma sommabile rispettivamente in A e in B) ortonormali, rispettivamente, in A e in B e $[\lambda_k]$ il sistema di numeri positivi per i quali riesce

$$K(x, y) \backsim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(x)\overline{v}_k(y)}{\lambda_k} \;{}^{(2)},$$

posto

$$a_k = \int_A f(x)\overline{u}_k(x)dx,$$

$$F(x) \backsim f(x) - \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k(x).$$

(1) L. AMOROSO, *Intorno all'equazione integrale di prima specie*, « Boll. Unione Matem. Italiana », serie II, anno I, n. 3, pag. 193, 1939.

(2) Cfr. i miei *Appunti d'Analisi superiore*, [Rondinella (Napoli)], p. 652. Con $\overline{c}$ indico la quantità coniugata di c.

si ha che:

L'estremo inferiore di $I[\varphi]$ *in* Γ *è dato da*

$$\int_A |F(x)|^2 dx,$$

ed una successione estremante inferiormente da

$$\varphi_n(y) = \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda_k v_k(y), \qquad per\ n = 1, 2\ldots.$$

Posto, invero,

$$\alpha_k = \int_B \varphi(y)\bar{v}_k(y)dy,$$

si ha immediatamente

$$(1) \qquad I[\varphi] = \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\alpha_k}{\lambda_k} - a_k\right|^2 + \int_A |F(x)|^2 dx,$$

e quindi

$$I[\varphi] \geq \int_A |F(x)|^2 dx.$$

$$I[\varphi_n] = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|^2 + \int_A |F(x)|^2 dx.$$

La (1) dice pure che:

$I[\varphi]$ *possiede minimo in* Γ *quando e solo quando si abbia*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |a_k|^2 < +\infty,$$

e allora le funzioni minimanti sono tutte e sole quelle per cui riesce:

$$\int \varphi(y)\bar{v}_k(y)dy = \lambda_k a_k. \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$