

---

# BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

LUIGI AMOROSO

## Intorno alla equazione integrale di prima specie

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2,*  
Vol. 1 (1939), n.3, p. 195–197.

Unione Matematica Italiana

<[http://www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_1939\\_2\\_1\\_3\\_195\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_3_195_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

*SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione  
Matematica Italiana, 1939.

# SEZIONE SCIENTIFICA

## PICCOLE NOTE

### Intorno alla equazione integrale di prima specie.

Nota di L. AMOROSO (a Roma).

**Sunto.** - Si applica il metodo dei minimi quadrati e si dimostra che il criterio di risolubilità della proposta si traduce nella condizione che sia nulla la somma dei quadrati degli scarti.

Non so se sia stato osservato che la condizione di risolubilità per l'equazione integrale di prima specie, quando il nucleo non è completo, si può esprimere in forma semplice aggiungendo alla nota condizione di PICARD (1), valida per il nucleo completo, la ulteriore condizione che la serie dei quadrati di certi coefficienti di Fourier relativi alla funzione nota abbia per somma l'integrale del quadrato della funzione stessa.

Precisamente se l'equazione è

$$(1) \quad \int_a^b f(x)H(x, y)dx = g(y),$$

$f(x)$  essendo la funzione incognita; se  $\varphi_r(x)$ ,  $\psi_r(y)$  ( $r=1, 2, \dots$ ) sono le funzioni caratteristiche del nucleo  $H$ , normali ortogonali nell'intervallo  $a \rightarrow b$ , per le quali vale formalmente lo sviluppo:

$$(2) \quad H(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\psi_n(y)}{\lambda_n},$$

se la serie di PICARD indicata con  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 A_n^2$ , ove

$$(3) \quad A_n = \int_a^b g(y)\psi_n(y)dy$$

(1) « Comptes Rendus », 14 giugno 1909.

è risolubile, quando, applicando il metodo dei minimi quadrati la somma dei quadrati degli scarti risulta nulla.

4. Lo stesso criterio può essere ottenuto come estensione all'infinito del criterio analogo valido per un sistema di  $m$  equazioni con  $n$  incognite

$$(9) \quad \sum_{s=1}^n a_{rs}x_s = c_s \quad r = 1, 2 \dots m.$$

Se si determinano le incognite col metodo dei minimi quadrati la quantità  $I$ , che rappresenta la somma dei quadrati degli scarti è determinata dalla equazione

$$\begin{vmatrix} A_{12} & A_{12} & \dots & A_{1n} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} & B_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} & B_n \\ B_1 & B_2 & \dots & B_n & B - I \end{vmatrix} = 0$$

ove

$$A_{rs} = \sum_{i=1}^m a_{ri}a_{is}; \quad B_r = \sum_{i=1}^m a_{ri}c_i; \quad B = \sum_{i=1}^m c_i^2.$$

Supposto che i coefficienti  $a_{rs}$  soddisfino alla condizione di normale ortogonalità, indicata da

$$(10) \quad \begin{aligned} A_{rs} &= 0, \text{ per } r \neq s \\ &= 1, \text{ » } r = s, \end{aligned}$$

la precedente equazione fornisce immediatamente

$$(11) \quad I = B - \sum_{r=1}^n B_r^2,$$

sicché la condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema (10) sia risolubile è espressa dalla condizione  $I = 0$ , che è verificata quando il secondo membro della precedente formula è nullo.

Ciò posto, dividiamo l'intervallo  $a \rightarrow b$  in  $m$  parti uguali; diciamo  $y_1, y_2, \dots, y_m$  i punti centrali di ciascun intervallo; posto

$$x_s = \frac{1}{\lambda_s} \int_a^b f(x) \varphi_s(x) dx$$

$$\varphi_s(y_r) = a_{rs}, \quad g(y_r) = c_r \quad \begin{aligned} r &= 1, 2, \dots, m \\ s &= 1, 2, \dots, \infty \end{aligned}$$

facciamo crescere  $m$  all'infinito. La equazione (1) si trasforma allora in un sistema di infinite equazioni con infinite incognite del tipo (9), per le quali valgono incondizionatamente le formule (10), e la condizione di risolubilità è espressa quindi, in forza di (11), dalla equazione  $I=0$ . Essendo

$$B = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^m c_s^2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^m (g(y_s))^2 = \int_a^b g^2(y) dy$$

$$B_r = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m a_i c_i = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \psi_r(y_i) g(y_i) = \int_a^b \psi_r(y) g(y) dy,$$

la equazione  $I=0$  porta

$$\int_a^b g^2(y) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^n \left( \int_a^b \psi_r(y) g(y) dy \right)^2$$

e coincide quindi con (4).

6. Mi sia concesso di ricordare che la condizione di risolubilità della equazione (1) era stata da me stesso stabilita molti anni fa <sup>(2)</sup> in forma diversa, ma sempre nello stesso ordine di idee di ricondurre il problema ad un problema di minimo. Peraltro anziché rendere minima la somma dei quadrati degli scarti imponevo allora la condizione di minimo alla somma dei quadrati della funzione incognita. La trattazione più complicata, porta al risultato di condizionare la risolubilità della proposta alla convergenza di

una determinata serie ivi indicata col simbolo  $\sum \frac{\Gamma_{\mu'}^2}{B_{\mu'}}$ , la cui somma

rappresenta l'integrale del quadrato della funzione incognita. Il risultato più antico è meno semplice, ma più comprensivo, in quanto la convergenza della serie ora ricordata è condizione necessaria e sufficiente per la risolubilità della proposta, indipendentemente dalla convergenza della serie di PICARD, comunque sia il nucleo, completo o non completo.

(2) Sulla risolubilità della equazione integrale lineare di prima specie, « Rend. Acc. Lincei », 1910.