
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

DARIO GRAFFI

L'influenza degli urti sulla propagazione delle radioonde nei gas jonizzati

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2,
Vol. 1 (1939), n.2, p. 99–105.

Unione Matematica Italiana

http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_2_99_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1939.

L'influenza degli urti sulla propagazione delle radioonde nei gas jonizzati.

Nota di DARIO GRAFFI (a Bologna).

Sunto. - *Nel calcolo della velocità media per gli elettroni di un gas jonizzato in cui si propaga un campo elettromagnetico, si ammette, di solito, che l'effetto degli urti fra elettroni e molecole sia equivalente ad una forza di attrito. Questa ipotesi è stata provata, ammettendo sinoidale il campo elettromagnetico, da APPLETON e CHAPMAN in base a considerazioni di meccanica statistica. L'A. estende queste considerazioni al caso (non contemplato dai suddetti autori) in cui sul gas agisce un campo magnetico, supponendo inoltre il campo elettromagnetico variabile in modo qualunque col tempo.*

1. Consideriamo un gas jonizzato, costituito, per semplicità di esposizione, solo da elettroni e da molecole neutre. Nel gas, sottoposto all'azione di un campo magnetico costante H_0 , si abbia un campo elettromagnetico di una radioonda F, H . È fondamentale per la propagazione jonosferica scrivere le equazioni di MAXWELL per F e H . E per cose note, si raggiunge questo scopo, qualora si conosca la velocità media V_m degli elettroni per unità di volume, in funzione di F .

Il calcolo di V_m si fa di solito nel seguente modo. Si osserva che su un elettrone di carica e , massa m , velocità V , agiscono le forze eF , e $eV \wedge H_0$ (la forza dovuta al campo H è trascurabile) e inoltre una forza φ che rappresenta l'azione delle molecole sull'elettrone (1), forza che si manifesta in modo sensibile solo du-

(1) Ammetteremo, conformemente ai risultati di DARWIN (« Proceedings Royal Society », 146, 17-46, 1934) trascurabile l'azione sull'elettrone degli altri elettroni.

rante un urto. Si ammette, di solito, che la media delle φ per gli elettroni dell'unità di volume equivalga ad una forza di attrito il cui valore sia (se ν è il numero degli urti dell'elettrone nell'unità di tempo) $-m\nu V_m$.

Allora sommando le equazioni del moto dei singoli elettroni per unità di volume e dividendo per il loro numero N si trova l'equazione:

$$(1) \quad m \frac{dV_m}{dt} = eF + eV_m \wedge H_0 - m\nu V_m.$$

dalla quale si ricava, come è noto, V_m . La validità della (1), ossia, in ultima analisi, l'equivalenza degli urti ad una forza di attrito, è stata dimostrata da APPLETON e CHAPMAN⁽²⁾ sulle tracce di una dimostrazione di LORENTZ⁽³⁾, supponendo $H_0 = 0$, F sinoidale.

Ci proponiamo in questa Nota di provare, nell'ipotesi dei suddetti Autori, la validità generale della (1), ossia anche se $H_0 \neq 0$, e la F non è sinoidale. Supporremo solo, conformemente del resto a quanto succede in pratica, F nulla negli istanti precedenti una certa epoca (del resto comunque remota) che possiamo prendere come origine del tempo⁽⁴⁾.

Noi otterremo i nostri risultati mediante alcune considerazioni di calcolo operativo. Ci sembra che, senza questo metodo (forse di qualche interesse), si andrebbe incontro a calcoli lunghi, anche se non concettualmente difficili.

2. Prima di entrare in argomento osserviamo che l'unità di volume del gas verrà scelta abbastanza piccola, in modo che F si possa ritenere in questo volume uniforme, abbastanza grande in modo da contenere molti elettroni. Così, per esempio, nella regione F_2 della ionosfera si può prendere come unità di volume il dm^3 che contiene circa 10^9 elettroni, mentre il campo elettrico (la cui lunghezza d'onda è al minimo 10 m.)⁽⁵⁾, si può ritenere in un dm^3 uniforme.

Per calcolare V_m all'istante t , prendiamo in esame gli elettroni contenuti in un volume unitario che hanno compiuto l'ultimo urto all'istante $t - \theta$, e più precisamente nell'intervallo $(t - \theta,$

(2) APPLETON e CHAPMAN, « Proceedings Physical Society », 44, 1932, 246-254. Vi sono, nella letteratura radiotecnica, numerosi studi sull'effetto degli urti, ma non mi consta che sia stata ricavata la (1) nel caso generale $H_0 \neq 0$, F non sinoidale e nelle ipotesi di APPLETON.

(3) LORENTZ, *Theory of Electrons*, 1909, pag. 309.

(4) Questa ipotesi è fatta per evitare inutili complicazioni matematiche, ma, forse, non è necessaria.

(5) Ci riferiamo alle radioonde che attraversano la ionosfera.

$t - \theta - d\theta$). Nell'intervallo $(t - \theta, t)$ agiranno su questi elettroni solo le forze eF , $eV \wedge H_0$. Avremo allora:

$$(2) \quad m \frac{dV}{dt} = eF + eV \wedge H_0.$$

Sommiamo la (2) su tutti gli elettroni che hanno finito l'ultimo urto all'istante $t - \theta$. Indichiamo con A il loro numero, con V_0 la somma delle loro velocità. Si ha subito:

$$(3) \quad m \frac{dV_0}{dt} = AeF + eV_0 \wedge H_0.$$

Da questa equazione si può calcolare V_0 , ammettendo con LORENTZ e APPLETON che dopo un urto la direzione delle velocità degli elettroni non sia in alcun modo privilegiata, sicchè si possa supporre $V_0 = 0$ all'istante $t - \theta$.

Allora V_0 all'istante t sarà determinata dalla (3) applicata nell'intervallo $(t - \theta, t)$, o meglio dalla conoscenza di F in questo intervallo. Quindi il valore di V_0 all'istante t che si ricava dalla (3), non cambierà anche ammettendo valida, come ora faremo, questa equazione in tutti gli istanti superiori a t .

Allora cambiamo nella (3) t in τ . Moltiplichiamola per $e^{-\omega\tau}$ e integriamola da $t - \theta$ a T , essendo $T > t$ e ω un numero complesso con parte reale positiva. Si avrà subito, posto $\omega_0 = \frac{e}{m} H_0$

$$(4) \quad \int_{t-\theta}^T e^{-\omega\tau} \frac{dV_0}{d\tau} d\tau = \frac{Ae}{m} \int_{t-\theta}^T F e^{-\omega\tau} d\tau + \int_{t-\theta}^T e^{-\omega\tau} V_0 d\tau \wedge \omega_0.$$

Integriamo ora il primo membro di (4) per parti ricordando $V_0 = 0$ per $\tau = t - \theta$. Indicando con f e v gli integrali a secondo membro di (4) contenenti rispettivamente F e V_0 e con a il vettore $e^{-\omega T} V_0(T)$ si ha:

$$(5) \quad \omega v = \frac{Ae}{m} f + v \wedge \omega_0 - a.$$

Risolviamo questa equazione in v con un artificio dovuto in sostanza ad HARTREE⁽⁶⁾. Moltiplichiamo prima scalarmente, poi vettorialmente la (5) per ω_0 . Si ha, ricordando note formule di calcolo vettoriale⁽⁷⁾:

$$(6) \quad \omega v \times \omega_0 = A \frac{e}{m} f \times \omega_0 - \omega_0 \times a,$$

$$(7) \quad \omega v \wedge \omega_0 = A \frac{e}{m} f \wedge \omega_0 + (v \times \omega_0) \omega_0 - \omega_0^2 v - a \wedge \omega_0.$$

⁽⁶⁾ « Proceedings Cambridge Philosophical Society », 27, 143, 1931.

⁽⁷⁾ Cioè la formula $(v \wedge \omega_0) \wedge \omega_0 = (v \times \omega_0) \omega_0 - \omega_0^2 v$.

Sostituendo al primo membro di (7) il valore di $v \wedge \omega_0$ dato da (5), e al secondo membro il valore di $v \times \omega_0$ dato da (6), si trova, dopo alcuni calcoli:

$$(8) \quad v = A \frac{e}{m} \frac{\omega}{\omega^2 + \omega_0^2} f' + A \frac{e}{m} \frac{f \wedge \omega_0}{\omega^2 + \omega_0^2} + A \frac{e}{m} \frac{(\omega_0 \times f) \omega_0}{\omega(\omega^2 + \omega_0^2)} - \\ - \frac{(\omega_0 \times a) \omega_0}{\omega(\omega^2 + \omega_0^2)} - \frac{a \wedge \omega_0}{\omega^2 + \omega_0^2} - \frac{\omega}{\omega^2 + \omega_0^2} a.$$

Vediamo ora di passare da v a V_0 . A questo scopo consideriamo nel piano complesso la retta $c - i\infty$, $c + i\infty$ a destra dell'asse immaginario. Integriamo (8) moltiplicata per $e^{\omega t}$ lungo questa retta e dividiamo il risultato per $2\pi i$.

V_0 soluzione di equazioni differenziali a coefficienti costanti, sarà continua con la sua derivata, quindi per il teorema di FOURIER⁽⁸⁾, il primo membro dell'equazione che così si ottiene varrà $V_0(t)$.

Gli integrali contenenti a sono nulli, come è facile convincersi⁽⁹⁾. Si avrà così:

$$(9) \quad V_0 = \frac{1}{2\pi i} A \frac{e}{m} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\omega e^{\omega t}}{\omega^2 + \omega_0^2} f d\omega + \frac{1}{2\pi i} A \frac{e}{m} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{\omega t} f \wedge \omega_0}{\omega^2 + \omega_0^2} d\omega + \\ + \frac{1}{2\pi i} A \frac{e}{m} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{\omega t} (f \times \omega_0)}{\omega(\omega^2 + \omega_0^2)} \omega_0 d\omega.$$

(8) Infatti è:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} V e^{\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} d\omega \int_{t-\theta}^T e^{-\omega \tau} V_0(\tau) d\tau.$$

Ora l'integrazione rispetto a ω è equivalente all'integrazione sempre rispetto a ω lungo l'asse immaginario, cioè da $-i\infty$ a $+i\infty$. (Cfr. per es. la mia Memoria: *Considerazioni sul metodo degli operatori funzionali*. « Memorie dell'Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei », 1935, pag. 215). Si ottiene così lo sviluppo in integrale di FOURIER di una funzione nulla fuori dell'intervallo $(t - \theta, T)$ continua con derivata continua in questo intervallo. Siccome questa funzione all'istante t coincide con V_0 (calcolato nello stesso istante t), il nostro asserto risulta così provato.

(9) Infatti l'integrando dei due primi è regolare nella regione del piano complesso a destra di $c - i\infty$, $c + i\infty$, poi, essendo $T > t$, detto integrando tende in tutta la regione per $|\omega| \rightarrow \infty$ uniformemente allo zero di ordine maggiore di 1. Essi sono perciò nulli. (Cfr. la mia Memoria citata, pag. 222).

L'ultimo integrale si può scomporre nell'integrale di $-\frac{e^{-\omega(T-t)}}{\omega} V_0(T)$ sommato con l'integrale di $\frac{\omega_0^2}{\omega(\omega^2 + \omega_0^2)} e^{-\omega(T-t)} V_0(T)$. Quest'ultimo è nullo per

I tre integrali ora scritti sono ovviamente convergenti, perchè se F è continua con la sua derivata (come si può sempre ammettere senza ledere la generalità della questione) f tende per $\omega \rightarrow c \pm i\infty$ allo zero di ordine numerico uno ⁽¹⁰⁾, e allora ogni integrando tende per $\omega \rightarrow c \pm i\infty$ allo zero di ordine numerico ⁽¹¹⁾, almeno uguale a due.

È poi facile provare ⁽¹²⁾ che la f nei secondi membri di (9) si può anche scrivere uguale all'integrale di $e^{-\omega\tau}F(\tau)$ esteso fra 0 e t senza alterare l'equazione in discorso.

Ciò posto, vediamo di calcolare V_m . A questo scopo ammettiamo con LORENTZ e APPLETON che il numero A degli elettroni il cui ultimo urto è avvenuto nell'intervallo $t - \theta$, $t - \theta - d\theta$ valga $Nve^{-v\theta}d\theta$, se N è il numero degli elettroni per unità di volume. Allora per calcolare V_m basta sommare tutte le V_θ e dividerle per N , o in altre parole, occorre integrare il secondo membro di (9) rispetto a θ e dividerlo per N . Noi limiteremo questo calcolo al primo integrale di (9) che indicheremo con I , chè le stesse considerazioni si possono ripetere per il secondo e per il terzo. Si avrà ⁽¹³⁾:

$$(10) \quad I = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty ve^{-v\theta} d\theta \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\omega e^{\omega t}}{\omega^2 + \omega_0^2} d\omega \int_{t-\theta}^t e^{-\omega\tau} F(\tau) d\tau,$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\omega e^{\omega t}}{\omega^2 + \omega_0^2} d\omega \int_0^\infty ve^{-v\theta} d\theta \int_{t-\theta}^t e^{-\omega\tau} F(\tau) d\tau.$$

Le stesse ragioni degli altri ora considerati, l'altro è pure nullo, come è notissimo. (Cfr. PINCHERLE, *Teoria delle funzioni analitiche*, Bologna, Zanichelli, pag. 330).

⁽¹⁰⁾ Loc. cit., nota (8).

⁽¹¹⁾ Ricordiamo che una funzione tende per $|\omega| \rightarrow \infty$ secondo una certa direzione allo zero di ordine numerico α , ($\alpha > 0$) quando esistono due numeri positivi M e ω_1 tali che per $|\omega| > \omega_1$ sia $|f(\omega)| < \frac{M}{|\omega|^\alpha}$.

⁽¹²⁾ Dimostriamo ciò per il primo integrale di (9). Le stesse considerazioni si possono ripetere per gli altri. Si ha subito:

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\omega e^{\omega t}}{\omega^2 + \omega_0^2} d\omega \int_0^T e^{-\omega\tau} F(\tau) d\tau = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\omega e^{\omega t}}{\omega^2 + \omega_0^2} d\omega \int_0^t e^{-\omega\tau} F(\tau) d\tau + \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\omega e^{\omega t}}{\omega^2 + \omega_0^2} d\omega \int_t^T e^{-\omega\tau} F(\tau) d\tau.$$

Ora l'ultimo integrale è nullo, perchè l'integrando è a destra di $c - i\infty$, $c + i\infty$ regolare, e tende uniformemente allo zero per $|\omega| \rightarrow \infty$ d'ordine numerico maggiore di 1. (Cfr. la mia Memoria citata, pag. 223). Risulta così il nostro asserto.

⁽¹³⁾ Si noti che l'inversione delle integrazioni nella (10) è lecita per il carattere delle funzioni sotto il segno.

Ora, integrando per parti, si ha:

$$\int_0^{\infty} \nu e^{-\nu \theta} d\theta \int_{t-\theta}^t e^{-\omega \tau} F(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} e^{-\omega(t-\theta)} e^{-\nu \theta} F(t-\theta) d\theta.$$

Sostituendo nell'espressione di I dopo aver posto $t-\theta = \xi$, cambiando ω in $\omega_1 + \nu$ e ricordando infine che $F(\tau)$ è nulla per $\tau \leq 0$

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\nu-i\infty}^{c-\nu+i\infty} \frac{(\omega_1 + \nu) e^{\omega_1 t}}{(\omega_1 + \nu)^2 + \omega_0^2} d\omega_1 \int_0^t e^{-\omega_1 \xi} F(\xi) d\xi.$$

Ovviamente questo integrale non cambia ponendo ω in luogo di ω_1 , τ in luogo di ξ ; e per il teorema di CAUCHY non cambia se nei limiti si pone $\nu = 0$. Esso allora coincide col primo integrale di (9), purchè in luogo di ω si ponga $\omega + \nu$ (14), di $t-\theta$ nell'espressione di f lo zero, e si faccia $A = 1$. Si può dunque concludere in generale che V_m è data da (9) ponendo $\omega + \nu$ in luogo di ω , 0 di $t-\theta$, $A = 1$.

Ciò posto, riprendiamo l'equazione (1) divisa per m :

$$(11) \quad \frac{dV_m}{dt} + \nu V_m = \frac{e}{m} F + V_m \wedge \omega_0.$$

Se noi dimostriamo che la soluzione di questa equazione coincide con l'espressione di V_m sopra trovata, resterà provato ovviamente che V_m soddisfa alla (1), scopo del presente lavoro.

Siccome il campo elettrico è nullo per $t \leq 0$, sarà anche $V_m = 0$ per $t = 0$, sicchè potremo applicare alla (11) le stesse considerazioni fatte per la (3), sostituendo però 0 a $t-\theta$ e tenendo presente che ora $A = 1$. Eseguendo i calcoli si trova facilmente come resulti una equazione analoga a (5) con V_m e $\omega + \nu$ in luogo di V_0 e ω . Allora ripetendo le considerazioni fatte per passare da (5) a (9) si troverà V_m soluzione di (1) espressa mediante (9), dove, però, in luogo di ω vi è $\omega + \nu$, di $t-\theta$ 0 e A vale 1.

Il nostro asserto è così completamente provato. Anzi dalle nostre formule si ottiene subito V_m espressa operazionalmente mediante F , il che in qualche caso può essere utile.

Termineremo con la seguente ovvia osservazione. In pratica si suppone F alternativo sinoidale e si prende per soluzione di (1) l'unica alternativa che, però, in generale, non è nulla per $t = 0$. Ma è facile vedere che, dopo un certo tempo, grande rispetto a $\frac{1}{\nu}$, praticamente brevissimo, la soluzione di (1) nulla per $t = 0$ coincide

(14) Esclusi gli esponenziali e così nel seguito.

con quella alternativa. Sia infatti x la soluzione alternativa, posto $V_m = x + y$ avremo dalla (1)

$$\frac{dy}{dt} + \nu y = y \wedge \omega_0$$

moltiplicando scalarmente per y si ha:

$$\frac{dy^2}{dt} + 2\nu y^2 = 0$$

e se y_0 è il valore di y per $t = 0$

$$y^2 = y_0^2 e^{-2\nu t}$$

Allora y^2 per t grande rispetto a $\frac{1}{\nu}$ è trascurabile, quindi V_m si riduce a x , come si voleva provare.