
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

FRANCESCO SEVERI

Un'ampia estensione del criterio di Plücker-Clebsch

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2,
Vol. 1 (1939), n.2, p. 97–99.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_2_97_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1939.

SEZIONE SCIENTIFICA

PICCOLE NOTE

Un'ampia estensione del criterio di Plücker-Clebsch.

Nota di FRANCESCO SEVERI (a Roma).

Sunto. - *J' A. dimostra l'impossibilità dell'esistenza di intersezioni isolate, diverse dalle eventuali intersezioni fisse, di r varietà algebriche ad $r-1$ dimensioni variabili in una M_r irriducibile, quando le intersezioni generiche delle varietà stesse cadano in varietà subordinate ad M_r .*

1. Qualche anno fa dimostrai ⁽¹⁾ (per via puramente algebrica ed anche dal punto di vista delle funzioni analitiche) un teorema relativo alla compatibilità di un sistema di r equazioni algebriche in r variabili x , a coefficienti funzioni razionali o algebriche di più parametri. Se per un particolare gruppo dei valori dei parametri quelle equazioni ammettono una soluzione isolata nelle x , esse son compatibili per valori generici dei parametri, entro le varietà algebriche in cui questi son suscettibili di variare. Osservai pure come da questo teorema segua subito il criterio di PLÜCKER-CLEBSCH, il quale riceveva così la prima rigorosa dimostrazione.

Voglio ora stabilire una larga estensione di quel teorema, già da me enunciata occasionalmente altrove ⁽²⁾.

Sopra una M_r irriducibile, ad r dimensioni, sieno tracciate r varietà algebriche ad $r-1$ dimensioni F_1, F_2, \dots, F_r , qualcuna delle quali sia suscettibile di variare con continuità entro M_r . Se le intersezioni delle F (in numero finito o infinito) per generiche posizioni delle F variabili, cadono tutte in una varietà fissa (pura o impura) V ,

⁽¹⁾ *Sulla compatibilità dei sistemi di equazioni algebriche ed analitiche.* « Rendiconti della R. Acc. Nazionale dei Lincei », gennaio 1933-XI.

⁽²⁾ « Rendiconti della R. Acc. Nazionale dei Lincei », giugno 1937-XV, pag. 532.

subordinata ad M_r , e per particolari posizioni esiste fuori di V un'intersezione delle F in un punto semplice P di M_r , essa non è isolata.

Tale estensione deriva agevolmente dal ricordato teorema, trasferito ai sistemi di equazioni analitiche, quale trovasi nella seconda parte della mia citata Nota lineare del 1933. Basta invero introdurre r parametri uniformizzanti l'intorno di P in M_r , per riportarsi ad un sistema di equazioni analitiche (le equazioni delle F nei parametri uniformizzanti), a cui quel teorema è applicabile.

Ma dell'enunciata estensione si può dare altresì una semplicissima dimostrazione algebrica, come facile conseguenza del n. 5 della mia Nota del 1933.

Sia S_d lo spazio lineare ambiente di M_r . Moviamo dall'ipotesi che r varietà ad $r-1$ dimensioni F_1, \dots, F_r di M_r abbian nel punto semplice P di M_r un'intersezione isolata. Assunto in S_d un S_{d-r-2} generico (cioè un S_{d-r-2} che non incontri alcuna delle ∞^{r-1} corde di M_r per P , nè, quindi, alcuna delle tangenti alla varietà ivi), la proiezione (multipla) di M_r da S_{d-r-2} sopra uno spazio S_{r+1} è biunivoca fra gl'intorni del punto semplice P e della sua proiezione P' . Le varietà F_1, \dots, F_r si proiettano in r ipersuperficie F'_1, \dots, F'_r di S_{r+1} incontrantisi, attorno a P' , soltanto in P' . Se ora le F variabili si spostano negli intorni delle posizioni iniziali, altrettanto accade delle corrispondenti F' ; e, pel n. 5 della ricordata Nota lineare, le F' variate hanno costantemente un'intersezione isolata \bar{P}' vicina a P' . Attesa la biunivocità della corrispondenza fra i due intorni di P', P , ne deriva che le F variate hanno sempre un'intersezione isolata \bar{P} , vicina a P .

Suppongasi che la F_i sia variabile in un sistema algebrico ∞^{s_i} ($s_i \geq 0$, essendo qualche s maggiore di zero). A norma di quanto precede, agli s_i parametri da cui dipende F_i ($i = 1, \dots, r$) non s'impone alcuna condizione volendo che le F s'incontrino attorno a P . Pertanto, se le intersezioni di r forme F_1, \dots, F_r dipendenti rispettivamente da s_1, \dots, s_r parametri, per generici valori di questi, cadon tutte in una varietà fissa V (pura o impura) subordinata ad M_r , sicchè le F aventi intersezioni, fuori di V , in punti semplici di M_r , corrispondono a particolari valori di almeno un gruppo di quei parametri, quando un'intersezione siffatta esiste, non può essere isolata.

2. Il criterio di PLÜCKER-CLEBSCH consegue immediatamente supponendo che M_r sia uno spazio lineare e che V sia l'iperpiano all'infinito di questo.

Se invece V comprende oltre all'iperpiano all'infinito anche un insieme di varietà di degenerazione (rispetto al problema numera-

tivo che vien tradotto dal sistema considerato di r equazioni ⁽³⁾, il teorema del n.º precedente fornisce l'estensione del criterio di PLÜCKER-CLEBSCH data dal TERRACINI ⁽⁴⁾.

⁽³⁾ SEVERI, *Sui fondamenti della geometria numerativa e sulla teoria delle caratteristiche*. «Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti», t. LXXVI, 1916.

⁽⁴⁾ *Sul criterio di Plücker-Clebsch*. «Rendiconti della R. Acc. Nazionale dei Lincei», maggio 1935-XIII. Come si vede, l'estensione del TERRACINI è anch'essa una facile conseguenza della mia Nota lineea del 1933. Non occorre cioè invocare teoremi più elevati (di PERRON o di RABINOWISCH), come ha fatto quell'Autore.