
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

UMI

Corrispondenza

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2,
Vol. 1 (1939), n.2, p. 186–189.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_2_186_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

CORRISPONDENZA

A proposito delle Note (Fasc. I, 1939):

- F. CONFORTO, *Un'identità aritmetica che si presenta nella geometria algebrica* ;
- F. SIBIRANI, *Di una identità numerica* ;
- L. TOSCANO richiama la sua: *Somma dei coefficienti binomiali le cui classi formano una progressione aritmetica ordinaria*. « The Tôhoku Mathematical Journal », vol. 36, 1932, in cui fa applicazioni della formula di NETTO considerata da SIBIRANI.

Risposta - Dimostrare che la serie

$$(1) \quad a_0 - \frac{r_0}{2a_0} - \frac{r_1}{2a_1} - \frac{r_2}{2a_2} - \dots,$$

essendo

$$a_0^2 - r_0 = N \quad (N > 0),$$

$$(2) \quad a_n = a_{n-1} - \frac{r_{n-1}}{2a_{n-1}}, \quad (3) \quad r_n = \left(\frac{r_{n-1}}{2a_{n-1}} \right)^2 \quad (n \geq 1),$$

converge verso uno stesso numero, qualunque sia il valore positivo, non nullo, dato al primo termine a_0 .

1. Si osservi, anzitutto, che fra le variabili a_n , r_n sussiste la relazione

$$(4) \quad a_n^2 - r_n = N \quad (n \geq 0).$$

Difatti, quadrando la (2), si ha

$$a_n^2 = a_{n-1}^2 + \left(\frac{r_{n-1}}{2a_{n-1}} \right)^2 - r_{n-1},$$

da cui, per la (3), $a_n^2 = a_{n-1}^2 + r_n - r_{n-1}$, e quindi

$$a_n^2 - r_n = a_{n-1}^2 - r_{n-1} = a_{n-2}^2 - r_{n-2} = \dots = a_0^2 - r_0 = N.$$

Eliminando r_{n-1} fra la (2) e la $a_{n-1}^2 - r_{n-1} = N$, si ottiene la relazione ricorrente

$$(5) \quad a_n = \frac{a_{n-1}^2 + N}{2a_{n-1}} \quad (n \geq 1),$$

la quale mostra subito che, per essere $a_0 > 0$, tutte le a_n sono positive. Inoltre, poichè $r_n \geq 0$ ($n > 0$), e quindi, per la (4), $a_n^2 \geq N$ ($n > 0$), deve essere, a causa della (5), $a_n \leq a_{n-1}$ ($n > 1$).

Da tutto ciò consegue che la successione non crescente $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ converge verso un numero positivo; denotato con A tale numero, dalla (5) si deduce, con passaggio al limite,

$$A = \frac{A^2 + N}{2A}, \quad \text{da cui} \quad A = \sqrt{N}.$$

E poichè a_n non è altro che la somma parziale $n + 1^{\text{ma}}$ della (1), si può concludere che la serie (1) è convergente ed ha per somma il numero positivo \sqrt{N} , per ogni valore di $a_0 > 0$.

2. Supposto $a_0^2 > N$, dalla (4) si trae

$$(6) \quad a_n - \sqrt{N} = \frac{r_n}{a_n + \sqrt{N}} = \frac{r_n a_0}{a_0 a_n + a_0 \sqrt{N}} < \frac{a_0 r_n}{2N},$$

ed inoltre $0 < \frac{r_n}{a_n} < 1$. Si ha poi

$$\frac{r_n}{a_n} = \frac{\left(\frac{r_{n-1}}{a_{n-1}}\right)^2}{\left(2 - \frac{r_{n-1}}{a_{n-1}}\right)^2} < \left(\frac{r_{n-1}}{a_{n-1}}\right)^2,$$

sicchè, posto $k = \frac{r_0}{a_0^2}$, risulta

$$(7) \quad \frac{r_n}{a_n} \leq k 2^n.$$

Dalla (3), scritta sotto la forma $r_n = \frac{r_{n-1}}{4} \left(\frac{r_{n-1}}{a_{n-1}}\right)$, e dalla (7) si deduce

$$(8) \quad r_n \leq \frac{r_{n-1}}{4} k 2^{n-1};$$

eliminando r_1, r_2, \dots, r_{n-2} fra le (8), relative ai valori $1, 2, \dots, n-1$ dell'indice n , si perviene alla

$$r_{n-1} \leq \frac{r_0}{4^{n-1}} k 2^{n-1-1} = \frac{a_0^2}{4^{n-1}} k 2^{n-1},$$

e quindi, per la (3),

$$r_n \leq \frac{a_0^4 k 2^n}{4^{2n-1} a_{n-1}} < \frac{a_0^4 k 2^n}{4^{2n-1} N}.$$

Tenuto conto di questa disuguaglianza, dalla (6) si desume

$$a_n - \sqrt{N} < \frac{2a_0^5 k 2^n}{4^{2n} N^2},$$

ossia, per essere $N = a_0^2(1-k)$,

$$a_n - \sqrt{N} < \frac{2a_0 k 2^n}{4^{2n}(1-k)^2} \quad (n \geq 0).$$

Onde: l'errore che si commette, assumendo come valore approssimato (per eccesso) di \sqrt{N} il numero a_n , è inferiore a

$$\frac{2a_0 k 2^n}{4^{2n}(1-k)^2} \quad \left(0 < k = \frac{r_0}{a_0^2} < 1\right).$$

Ciò mostra che il procedimento di calcolo definito dalle (2) e (3) fornisce un ottimo metodo pratico per estrarre le radici quadrate.

3. In base alla (4), i due numeri a_n, r_n possono considerarsi rispettivamente come ascissa ed ordinata di un punto della parabola $y = x^2 - N$. La tangente ad essa nel punto (a_{n-1}, r_{n-1}) ha per ascissa all'origine $a_{n-1} - \frac{r_{n-1}}{2a_{n-1}}$, cioè a_n ; perciò: *il procedimento di calcolo definito dalle (2) e (3) consiste sostanzialmente nella successiva applicazione del metodo delle tangenti per la ricerca approssimata della radice positiva dell'equazione $x^2 - N = 0$.*

Applicando lo stesso metodo all'equazione $x^m - N = 0$ (m intero ≥ 2 , $N > 0$) per determinarne la radice positiva, cioè la radice aritmetica m^{esima} di N , si perviene ad una serie che generalizza nel modo più diretto e semplice la (1).

Infatti, preso a piacere un numero $a_0 > 0$, si indichino con $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ le ascisse all'origine delle tangenti alla curva $y = x^m - N$ rispettivamente nei punti $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, \dots$. Come è facile sincerarsi, tali numeri soddisfano alle relazioni

$$(9) \quad a_{n+1} = a_n - \frac{r_n}{ma_n^{m-1}} \quad (n \geq 0),$$

essendo $r_n = a_n^m - N$, e conseguentemente alle

$$(10) \quad r_{n+1} = \sum_{\mu=2}^m (-1)^\mu \binom{m}{\mu} a_n^{m-\mu} \left(\frac{r_n}{ma_n^{m-1}} \right)^\mu \quad (n \geq 0),$$

ottenute eliminando N , a_{n+1} fra la (9) e le $a_n^m - r_n = N$, $a_{n+1}^m - r_{n+1} = N$.

Avendosi poi $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt[m]{N}$, si conclude che la serie

$$a_0 - \frac{r_0}{ma_0^{m-1}} - \frac{r_1}{ma_1^{m-1}} - \frac{r_2}{ma_2^{m-1}} - \dots$$

(la quale per $m=2$ si identifica con la (1)) ha per somma la radice aritmetica m^{esima} di N .

A questo risultato si può giungere anche mediante un procedimento del tutto analogo a quello tenuto al n° 1, partendo dalla ipotesi che i numeri a_n, r_n verifichino le (9), (10) e le $a_0^m - r_0 = N$, $a_0 > 0$.

LUIGI ONOFRI

Altra risposta, analoga a quanto è contenuto nel § 1 della precedente, è stata data dal prof. E. MARTINELLI.