
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

FILIPPO SIBIRANI

Il Trattato delle spirali di Archimede

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2,
Vol. 1 (1939), n.2, p. 160–172.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_2_160_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Il Trattato delle spirali di Archimede.

Nota di F. SIBIRANI (a Bologna).

Sunto. - Sono riprodotti gli enunciati delle proposizioni contenute nel Trattato delle spirali di ARCHIMEDE, esposte le dimostrazioni date dal grande matematico siracusano (talora con simboli moderni) ed infine date alcune dimostrazioni coi mezzi analitici moderni.

Le opere di ARCHIMEDE (287-211 a. C.) che noi conosciamo sono:

1. « Della sfera e del cilindro ».
2. « Misura del circolo ».
3. « Dei conoidi e sferoidi ».

4. « Delle spirali » ⁽¹⁾.
5. « Dell'equilibrio dei piani ovvero dei loro centri di gravità ».
6. « L'Arenario ».
7. « La quadratura della parabola ».
8. « Intorno alle cose che stanno in sull'acqua o che in quella si muovono ».
9. « I lemmi ».
10. « Il problema bovino ».

Il trattato delle spirali comincia con una lettera a DOSITEO ⁽²⁾, al quale ARCHIMEDE manda la sua opera; la lettera si chiude con queste parole « e qui ancora, come nei libri che io prima trasmisi, assumo questo lemma ».

LEMMA. — *Delle linee e delle superficie diseguali, la differenza di cui la maggiore supera la minore può, ripetuta, superare qualsivoglia grandezza data fra quelle che si possono confrontare.*

Si direbbe, con linguaggio moderno, che si postula che le lunghezze delle linee e le aree delle superficie sono grandezze archimedee.

L'opera si può dividere in due parti: le prime 11 proposizioni servono di introduzione, in quanto sono 4 teoremi e 7 problemi ai quali si ricorre per le dimostrazioni dei teoremi sulle spirali; questi ultimi sono 17, seguiti da parecchi corollari, e costituiscono il vero trattato delle spirali.

PROPOS. I - TEOREMA. — *Se un punto si muove sopra una linea con moto equabile ⁽³⁾ ed in essa si prendono due linee ⁽⁴⁾, queste avranno fra loro la stessa ragione che hanno i tempi nei quali il punto le percorre.*

⁽¹⁾ Del trattato delle spirali fu fatta nel 1886 una versione in italiano dall'ing. V. SASSOLI (Bologna, N. Zanichelli) sull'edizione del testo greco curata da J. L. HEIBERG (Archimedis opera omnia e Codice fiorentino recensuit latine vertit notisque illustravit J. L. Heiberg. Lipsiae, 1880-81). Fra le traduzioni in altra lingua notiamo: in francese quella di PEYRARD (Parigi 1807) e la più recente di P. VER ECKE (Les oeuvres complètes d'Archimède, Paris-Bruxelles, 1921; per le spirali pp. 237-299); in tedesco quelle di STURM (Norimberga, 1670) di NIZZE (Stralsund, 1824) e la più recente di F. KLIEM, versione in tedesco (Berlin, 1914; per le spirali pp. 283-314) della versione inglese di Sir TH. L. HEATH.

⁽²⁾ DOSITEO DA PELUSIO (270-200 a. C.).

⁽³⁾ Moto equabile, dice GALILEO nella Giornata terza dei suoi Dialoghi, è quello le cui parti percorse dal mobile in qualsivogliano tempi eguali sono fra loro eguali.

⁽⁴⁾ Cioè due archi di traiettoria.

ARCHIMEDE dimostra la proporzionalità fra il tempo e lo spazio percorso nel moto uniforme, se questo è definito come nella nota (3).

PROPOS. II - TEOREMA. — *Se due punti, ciascuno sopra una loro propria linea, si muovono con moto equabile, e sopra di ognuna si prendono due linee, delle quali tanto le prime che le seconde siano percorse dai punti in tempi eguali, dette linee avranno fra loro la stessa ragione.*

ARCHIMEDE dimostra che in due moti uniformi gli spazi percorsi a parità di tempo sono proporzionali.

PROPOS. III - PROBLEMA. — *Dato un numero qualsivoglia di cerchi si può costruire una retta (5) che sia maggiore della somma delle loro periferie.*

Basta formare un segmento — dice ARCHIMEDE — eguale alla somma dei perimetri di poligoni circoscritti ai dati cerchi.

PROPOS. IV - PROBLEMA. — *Date due linee diseguali, una retta ed un arco di circolo, si può costruire una retta minore della più grande delle linee date e maggiore della più piccola.*

Il ragionamento di ARCHIMEDE, con veste moderna, è questo: se c è la lunghezza dell'arco di circolo, s quella del segmento ed è $c > s$, per il primo lemma c'è un intero n per cui

$$n(c - s) > s$$

da cui

$$\frac{s}{n} < c - s$$

ed allora

$$s + \frac{1}{n}s < c, \quad s + \frac{1}{n}s > s$$

cioè il segmento di misura $s + \frac{1}{n}s$ è quello che si vuol costruire; se $c < s$, esiste un intero n per cui

$$n(s - c) > s, \quad \frac{s}{n} < s - c$$

ed allora

$$s > c + \frac{s}{n}, \quad c + \frac{s}{n} > c;$$

il segmento che si vuol costruire ha la lunghezza $c + \frac{s}{n}$.

(5) Cioè un segmento. Anche negli altri enunciati è facile comprendere quando ARCHIMEDE intende con la parola *retta* dire *segmento di retta*.

PROPOS. V - PROBLEMA. — *Dato un circolo ed una retta ad esso tangente, si può condurre dal centro alla tangente una retta in modo che la porzione di essa compresa fra la periferia e la tangente abbia al raggio ragione minore di quella che ha l'arco compreso fra il punto di contatto e la retta prolungata ad un arco di circolo qualsivoglia ⁽⁶⁾.*

Riportiamo la costruzione di ARCHIMEDE, per un particolare che merita conto di segnalare, solo cambiando, quando occorra, la parola retta con segmento.

« Sia ABC il circolo dato (fig. 1) di centro J , la retta DF sia tangente al circolo in B e sia anche dato un arco qualsivoglia.

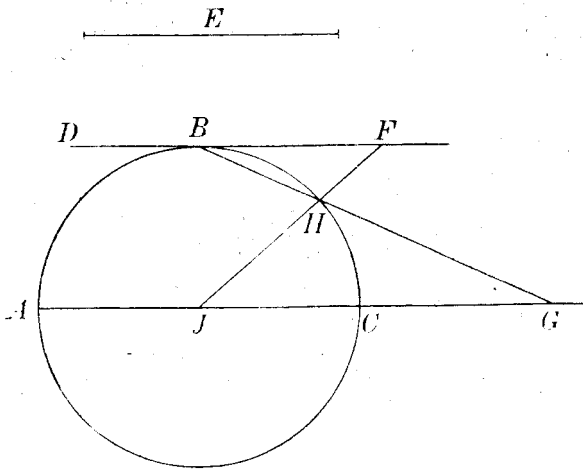


Fig. 1

Si può certamente costruire un segmento maggiore dell'arco dato e sia E . Si conduca pel centro J la retta AG parallela alla DF e pongasi il segmento GH uguale ad E che converga al punto B ; si prolunghi la retta condotta dal centro J al punto H . Pertanto la stessa ragione ha FH a HJ che BH a HG , percui FH a HJ ha minor ragione di quella che ha l'arco BH all'arco dato, perchè la corda BH è minore dell'arco BH e il segmento HG è maggiore dell'arco dato ».

Il particolare interessante a cui alludo dianzi è quello del tracciamento della retta BG in modo che sia HG eguale al segmento E .

Questa costruzione non è fatta con la riga e col compasso, ma per adattamento sperimentale; la costruzione detta per *interca-*

(6) Arco di circolo arbitrariamente prefissato.

lazione (od inserzione) era tuttavia ritenuta lecita dagli antichi geometri (7).

Si può notare che il punto G è l'intersezione della retta AC con la concoide che ha per base il circolo dato, per polo il punto B e per segmento costante il segmento E .

PROPOS. VI - PROBLEMA. — *Dato un circolo ed in esso una corda si può condurre un raggio che seghi la corda in modo che la porzione compresa fra la periferia e la corda abbia una data ragione alla retta condotta dall'estremo del raggio all'estremo della corda, purchè tale ragione sia minore di quella che ha la metà della corda alla retta che dal centro è condotta ad essa perpendicolare.*

Si consideri (fig. 2) un cerchio di centro O e sia AB una corda, C il suo punto di mezzo. Siano dati due segmenti α e β il

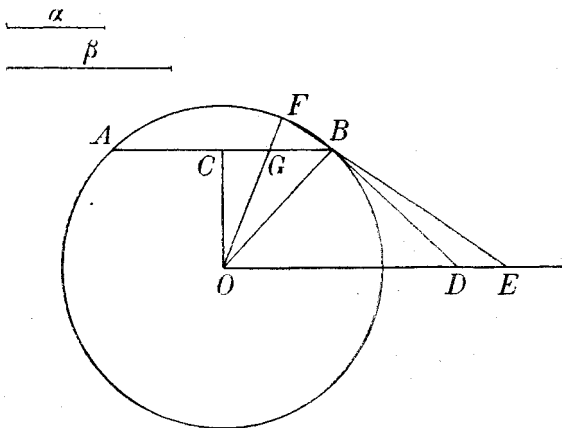


Fig. 2

cui rapporto $\alpha:\beta$ sia minore del rapporto $\overline{CB}:\overline{OC}$. Da O si mandi una retta s parallela alla corda AB , si conduca il raggio OB e per B la normale al raggio la quale incontri la s in D . I triangoli OCB , OBD sono simili, perciò $\overline{CB}:\overline{OC} = \overline{OB}:\overline{BD}$ e quindi il rapporto $\alpha:\beta$ è minore del rapporto $\overline{OB}:\overline{BD}$.

Sia γ un segmento tale da aversi $\alpha:\beta = \overline{OB}:\gamma$, di modo che è $\gamma > \overline{BD}$. Per B si mandi una retta che incontri la s in E (fuori di OD , dalla banda di D) (8) ed il circolo in F in modo che sia

(7) ZEUTHEN, *Histoire des Mathématiques*, p. 64.

(8) Questo è possibile per essere $\gamma > \overline{BD}$: allora F cade nell'arco minore di mezza circonferenza sotteso dalla corda e perciò OF incontra la corda.

$\overline{FE} = \gamma$. Se G è il punto di incontro della corda AB con il raggio OF , sarà

$$\overline{GF} : \overline{FB} = \overline{OB} : \overline{FE} \quad \text{cioè} \quad \overline{GF} : \overline{FB} = \alpha : \beta.$$

È dunque OF il raggio che si voleva condurre.

PROPOS. VII - PROBLEMA. -- *Abbiansi gli stessi dati e si prolunghi la corda; si può costruire una retta che dal centro vada alla corda prolungata in modo che la porzione di essa interposta fra la periferia ed il prolungamento della corda abbia una data ragione con la retta condotta dall'estremo della costrutta all'estremo della corda, purchè tale ragione sia maggiore di quella che ha la metà della corda compresa nel circolo alla retta che dal centro è condotta ad essa perpendicolare.*

Siano dati i due segmenti α e β aventi il rapporto $\alpha : \beta$ maggiore di $\overline{CB} : \overline{OC}$ (fig. 3). Condotta, come dianzi, la retta s e de-

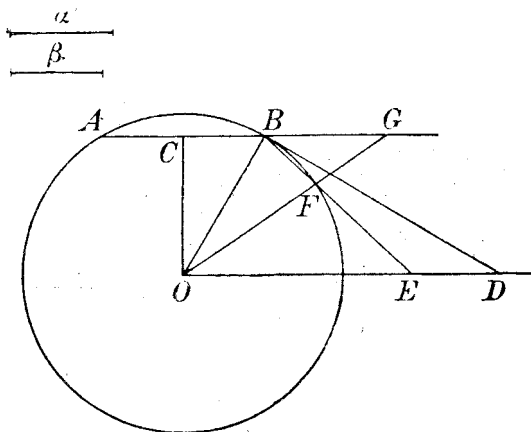


Fig. 3

terminato il punto D , sarà $\alpha : \beta > \overline{OB} : \overline{BD}$. Se γ è un segmento tale da aversi $\alpha : \beta = \overline{OB} : \gamma$, è $\gamma < \overline{BD}$. Per B si mandi una retta che incontra la s in un punto E (fra O e D) e la circonferenza in F (nell'arco maggiore di mezza circonferenza) in modo che sia $\overline{FE} = \gamma$. Se G è il punto di incontro della OF col prolungamento della corda, sarà

$$\overline{GF} : \overline{FB} = \overline{OB} : \overline{FE}, \quad \text{cioè} \quad \overline{GF} : \overline{FB} = \alpha : \beta.$$

È dunque OG la retta che si voleva condurre.

PROPOS. VIII - PROBLEMA. — *Dato un circolo, una corda, ed una tangente nell'estremo della corda, si può condurre una retta*

quello dei segmenti α e β e si supponga $\alpha:\beta > \overline{CB}:\overline{OC}$. Costruito come dianzi il punto D , risulta $\alpha:\beta > \overline{OB}:\overline{BD}$; si prolunghi DB fino ad E in guisa che sia $\alpha:\beta = \overline{OB}:\overline{BE}$; sarà allora $\overline{BE} < \overline{BD}$.

Per i punti O, D, E si faccia passare un circolo, il quale incontri in F il prolungamento di OB . Per O si conduca una retta che incontri la DE in G e l'ultimo circolo in H in modo che sia $\overline{GH} = \overline{BF}$; la stessa retta incontri in L il prolungamento della corda AB ed in M il circolo primitivo.

Come nella dimostrazione precedente si perviene alla proporzione $\overline{BE}:\overline{OM} = \overline{EG}:\overline{OL}$, da cui

$$(\overline{OL} - \overline{OM}):(\overline{EG} - \overline{BE}) = \overline{OB}:\overline{BE}$$

ed infine $\overline{ML}:\overline{GB} = \alpha:\beta$; la retta cercata è la OH .

PROPOS. X - TEOREMA. — *Se quante si vogliono rette eccedono l'un l'altra ordinatamente di egual quantità e l'eccesso sia eguale alla minima ed inoltre ne siano date altre in numero eguale alle prime ed in grandezza eguali ciascuna alla massima, la somma dei quadrati costruiti sulle rette eguali alla massima, accresciuta del quadrato della massima e del rettangolo contenuto dalla minima e dalla retta eguale a tutte quelle che eccedono fra loro di eguale quantità, sarà eguale al triplo della somma dei quadrati di tutte le rette che eccedono egualmente.*

Detta a la misura del segmento minimo, algebricamente si tratta di provare l'identità

$$(n+1)n^2a^2 + a\{a + 2a + 3a + \dots + na\} = 3\{a^2 + 4a^2 + 9a^2 + \dots + n^2a^2\}.$$

Il primo membro vale

$$(n+1)n^2a^2 + \frac{n(n+1)}{2}a^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}a^2.$$

il secondo

$$3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}a^2,$$

onde l'eguaglianza precedente è dimostrata.

Diamo ora la dimostrazione di ARCHIMEDE, solo presentandola con simboli moderni. Siano a_1, a_2, \dots, a_n segmenti in progressione aritmetica di ragione a_n . È

$$a_1 = a_2 + a_n = a_3 + a_{n-1} = a_4 + a_{n-2} = \dots = a_n + a_2 \\ (a_i + a_{n-i+2})^2 = a_i^2 + a_{n-i+2}^2 + 2a_i a_{n-i+2},$$

onde

$$\begin{aligned} & a_1^2 + (a_2 + a_n)^2 + (a_3 + a_{n-1})^2 + \dots + (a_n + a_2)^2 + a_1^2 = \\ & = a_1^2 + a_2^2 + a_n^2 + a_3^2 + a_{n-1}^2 + \dots + a_n^2 + a_2^2 + a_1^2 + \\ & \quad + 2(a_2a_n + a_3a_{n-1} + \dots + a_{n-1}a_3 + a_n a_2). \end{aligned}$$

Il primo membro è la somma di $n + 1$ quadrati del segmento massimo a_1 ; il secondo membro è il doppio della somma dei quadrati costruiti sugli n segmenti dati più il doppio dei rettangoli $a_2a_n, a_3a_{n-1}, \dots, a_{n-1}a_3, a_n a_2$. Per completare la dimostrazione basta far vedere che il doppio della somma di questi rettangoli aumentata del rettangolo fatto su a_n e su $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ equivale alla somma dei quadrati costruiti sugli n dati segmenti.

Poichè è

$$\begin{aligned} 2a_2a_{n-1} &= 4a_3a_n \\ 2a_4a_{n-2} &= 6a_4a_n \\ 2a_5a_{n-3} &= 8a_5a_n \\ &\dots \dots \dots \\ 2a_n a_2 &= 2(n-1)a_n a_n \end{aligned}$$

ne risulta

$$\begin{aligned} & 2[a_2a_n + a_3a_{n-1} + a_4a_{n-2} + \dots + a_n a_2] = \\ & = a_n [2a_2 + 4a_3 + 6a_4 + 8a_5 + \dots + 2(n-1)a_n] \end{aligned}$$

e quindi anche

$$\begin{aligned} & 2[a_2a_n + a_3a_{n-1} + a_4a_{n-2} + \dots + a_n a_2] + a_n [a_1 + a_2 + \dots + a_n] = \\ & = a_n [a_1 + 3a_2 + 5a_3 + 7a_4 + \dots + (2n-1)a_n]. \end{aligned}$$

Ora è

$$a_1^2 = na_1 \cdot \frac{a_1}{n} = na_1 a_n$$

$$\begin{aligned} na_1 &= a_1 + (n-1)a_1 = a_1 + (a_2 + a_n) + (a_3 + a_{n-1}) + \dots \\ & \quad \dots + (a_n + a_2) = a_1 + 2(a_2 + a_3 + \dots + a_n) \end{aligned}$$

onde

$$a_1^2 = a_n [a_1 + 2(a_2 + a_3 + \dots + a_n)].$$

È poi

$$a_2^2 = (n-1)a_2 \cdot \frac{a_2}{n-1} = (n-1)a_2 a_n$$

$$\begin{aligned} (n-1)a_2 &= a_2 + (a_3 + a_n) + (a_4 + a_{n-1}) + \dots \\ & \quad \dots + (a_n + a_3) = a_2 + 2(a_3 + a_4 + \dots + a_n) \end{aligned}$$

onde

$$a_2^2 = a_n [a_2 + 2(a_3 + a_4 + \dots + a_n)]$$

ed in generale

$$a_i^2 = a_n[a_i + 2(a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_n)].$$

Allora

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 &= a_n[a_1 + 2(a_2 + a_3 + \dots + a_n)] + \\ &+ a_n[a_2 + 2(a_3 + a_4 + \dots + a_n)] + a_n[a_3 + 2(a_4 + a_5 + \dots + a_n)] + \dots \\ &\dots + a_n[a_{n-1} + 2a_n] + a_n a_n = a_n[a_1 + 3a_2 + 5a_3 + 7a_4 + \dots + (2n-1)a_n] \end{aligned}$$

come volevasi provare.

Segue il

COROLLARIO. — *Da questo adunque, è manifesto che la somma dei quadrati delle rette eguali alla massima è minore del triplo della somma dei quadrati di tutte le rette che eccedono fra loro di egual quantità, perchè se si aumenta la prima somma di alcune superficie diventa tripla della seconda. La prima somma è maggiore del triplo della seconda toltone il quadrato della massima, perchè la quantità che si aggiunge alla prima somma è minore del triplo del quadrato della massima. Ed anche se si descrivono figure simili sopra tutte le rette, e sopra quelle che eccedono fra loro di egual quantità e sopra quelle eguali alla massima, la somma delle figure costruite sulle rette eguali alla massima sarà minore del triplo della somma delle figure costruite sulle rette che eccedono fra loro di egual quantità. La prima somma sarà poi maggiore del triplo della seconda, trattane la figura descritta sulla massima. Giacchè le figure simili hanno la stessa ragione dei quadrati:*

PROPOS. XI - TEOREMA. — *Se sono date ordinatamente quante-sivogliono rette che eccedono fra loro di egual quantità⁽¹⁰⁾ ed altre ancora in numero eguale alla prima meno uno e di grandezza ciascuna eguale alla massima, la somma dei quadrati descritti sulle rette eguali alla massima relativamente alla somma dei quadrati delle rette che eccedono fra loro di egual quantità, toltone il quadrato costruito sulla minima, ha maggior ragione del quadrato costruito sulla massima ad ambedue, al rettangolo cioè formato dalla massima e minima e alla terza parte del quadrato della differenza di cui la massima supera la minima. Di quest'ultima ragione poi la somma primitiva ha una ragione maggiore relativamente alla somma dei quadrati delle rette che eccedono fra loro di egual quantità, trattone il quadrato costruito sulla massima.*

⁽¹⁰⁾ Manca « eguale alla minima » come invece è indicato nell'enunciato della Propos. X: tuttavia dalla dimostrazione appare questa ipotesi.

Algebricamente si tratterebbe di provare che, dati gli n numeri $a, 2a, 3a, \dots, na$ sussiste la doppia diseuguaglianza

$$\frac{(n-1)n^2a^2}{4a^2+9a^2+\dots+n^2a^2} < \frac{n^2a^2}{na^2+\frac{1}{3}(n-1)^2a^2} < \frac{(n-1)n^2a^2}{a^2+4a^2+9a^2+\dots+(n-1)^2a^2}.$$

La prima diseuguaglianza equivale a $0 < 9n + 12$, la seconda a $0 < 9n + 6$, manifestamente verificate.

Indichiamo ora la dimostrazione di ARCHIMEDE.

Detti a_1, a_2, \dots, a_n gli n segmenti in progressione aritmetica di ragione a_n , si tratta di provare che

$$\frac{(n-1)a_1^2}{a_1^2+a_2^2+\dots+a_{n-1}^2} < \frac{a_1^2}{a_1a_n+\frac{1}{3}(a_1-a_n)^2} < \frac{(n-1)a_1^2}{a_2^2+a_3^2+\dots+a_n^2}.$$

Osservando che è

$$\frac{a_1^2}{a_1a_n+\frac{1}{3}(a_1-a_n)^2} = \frac{(n-1)a_1^2}{(n-1)a_1a_n+\frac{1}{3}(n-1)(a_1-a_n)^2}.$$

basta provare che è

$$a_2^2+a_3^2+\dots+a_n^2 < (n-1)a_1a_n+\frac{1}{3}(n-1)(a_1-a_n)^2 < a_1^2+a_2^2+\dots+a_{n-1}^2,$$

per aver dimostrata la proposizione.

Dall'essere $a_1 = a_n + (a_1 - a_n)$ discende

$$(n-1)a_1a_n = (n-1)a_n^2 + (n-1)a_n(a_1 - a_n)$$

onde

$$\begin{aligned} (1) \quad & (n-1)a_1a_n + \frac{1}{3}(n-1)(a_1 - a_n)^2 = \\ & = (n-1)a_n^2 + (n-1)a_n(a_1 - a_n) + \frac{1}{3}(n-1)(a_1 - a_n)^2 \end{aligned}$$

e dall'essere

$$a_i^2 = [a_n + (a_i - a_n)]^2 = a_n^2 + (a_i - a_n)^2 + 2a_n(a_i - a_n)$$

ne deriva

$$\begin{aligned} (2) \quad & a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2 = (n-1)a_n^2 + (a_1 - a_n)^2 + (a_2 - a_n)^2 + \dots \\ & \dots + (a_{n-1} - a_n)^2 + 2a_n[(a_1 - a_n) + (a_2 - a_n) + \dots + (a_{n-1} - a_n)]. \end{aligned}$$

Per il corollario della propos. X è

$$(a_1 - a_n)^2 + (a_2 - a_n)^2 + \dots + (a_{n-1} - a_n)^2 > \frac{1}{3}(n-1)(a_1 - a_n)^2$$

ed essendo

$$2[(a_1 - a_n) + (a_2 - a_n) + \dots + (a_{n-1} - a_n)] > (n-1)(a_1 - a_n)$$

ne viene

$$2a_n[(a_1 - a_n) + (a_2 - a_n) + \dots + (a_{n-1} - a_n)] > (n-1)a_n(a_1 - a_n).$$

Allora confrontando i due secondi membri delle (1) e (2) si trae

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2 > (n-1)a_1a_n + \frac{1}{3}(n-1)(a_1 - a_n)^2.$$

È poi

$$\begin{aligned} (3) \quad a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 &= [a_n + (a_2 - a_n)]^2 + [a_n + (a_3 - a_n)]^2 + \dots \\ &\dots + [a_n + (a_{n-1} - a_n)]^2 = (n-1)a_n^2 + (a_2 - a_n)^2 + (a_3 - a_n)^2 + \dots \\ &\dots + (a_{n-1} - a_n)^2 + 2a_n[(a_2 - a_n) + (a_3 - a_n) + \dots + (a_{n-1} - a_n)]. \end{aligned}$$

Per il corollario della propos. X

$$(n-1)(a_1 - a_n)^2 > 3[(a_2 - a_n)^2 + (a_3 - a_n)^2 + \dots + (a_{n-1} - a_n)^2]$$

ed essendo

$$(n-1)(a_1 - a_n) > 2[(a_2 - a_n) + (a_3 - a_n) + \dots + (a_{n-1} - a_n)]$$

è anche

$$a_n(n-1)(a_1 - a_n) > 2a_n[(a_2 - a_n) + (a_3 - a_n) + \dots + (a_{n-1} - a_n)].$$

Confrontando l'ultimo membro della (3) con il secondo della (1) si trae

$$a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 < (n-1)a_1a_n + \frac{1}{3}(n-1)(a_1 - a_n)^2.$$

Segue il

COROLLARIO. — *Per cui se si descrivono figure simili su tutte le rette, e sopra quelle che eccedono fra loro di egual quantità e sopra quelle che sono eguali alla massima, la somma delle figure costruite sulle rette eguali alla massima relativamente alla somma delle figure costruite sulle rette che eccedono fra loro di egual quantità toltane la figura descritta sulla minima ha minor ragione di quella che ha il quadrato costruito sulla massima alla somma costituita del rettangolo formato dalla massima e dalla minima e della terza parte del quadrato della differenza fra la massima e la minima; a quest'ultima ragione poi la somma primitiva ha una ragione maggiore relativamente alla somma delle figure costruite sulle medesime rette toltane il quadrato della massima, poichè le figure simili hanno la stessa ragione dei quadrati.*

Con questo corollario termina la parte che abbiamo chiamata introduttiva. (continua)