
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ANNIBALE COMESSATTI

**Una questione elementare studiata
con mezzi superiori. Saggio sul
problema delle sezioni di un diedro**

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2,
Vol. 1 (1939), n.2, p. 145–160.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_2_145_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1939.

SEZIONE STORICO-DIDATTICA

PICCOLE NOTE

Una questione elementare studiata con mezzi superiori. Saggio sul problema delle sezioni di un diedro.

Nota di ANNIBALE COMESSATTI (a Padova).

Sunto. - *Il saggio è dedicato alla distribuzione dei piani che segano un angolo diedro secondo un angolo rettilineo di misura assegnata. La discussione del tema induce spontaneamente ad escursioni sostanziali in vari campi delle matematiche superiori (geometria non euclidea, teoria delle funzioni ellittiche, riemanniane simmetriche, analisi delle singolarità reali delle curve algebriche reali. ecc.).*

Secondo le vedute del comitato scientifico della nostra Unione, del quale mi onoro di far parte, nel programma di questa sezione storico-didattica, la quale, fin dalla nascita, vuol avvisare ad una maturità rigorosa, s'inserisce anche ogni contributo inteso ad illustrare e vivificare i rapporti tra matematiche elementari e matematiche superiori. Nel proposito di assecondare tale indirizzo, e, forse, colla fortuna d'inaugurarlo, ho rielaborato in forma organica alcuni miei appunti intorno ad un problema, che, pur enunciandosi in forma elementare, richiama alla sua discussione, con attinenze singolarmente variate, e non peranco esaurite in questo saggio, il soccorso di concetti ed algoritmi elevati, e lo sforzo di un appropriato virtuosismo. Sia detto ciò senza presunzione, e senza pretesa d'aver esaurito l'argomento, che, per quanto non abbia in sè interesse scientifico, ritengo possa provocare informazioni, osservazioni e riflessioni fortemente istruttive.

§ 1. Primo sguardo sintetico al problema.

Interpretazione non euclidea.

1. Ecco anzitutto il problema, nella sua forma più schematica:
È dato un angolo diedro di misura φ . Come si distribuiscono i piani che lo segano secondo un angolo (rettilineo) di misura α ?

Una prima precisazione. Per non snaturare il carattere algebrico del problema, considereremo il diedro *completo*, ne indicheremo con α, β le facce, con z lo spigolo, che, per le opportunità del seguito, si supponrà orientato. Con φ indicheremo sempre la misura del relativo angolo *acuto* ($\leq \frac{\pi}{2}$); convenzione, del resto, di pura opportunità, in quanto tutto andrebbe egualmente, se in sua vece si considerasse l'angolo ottuso $\pi - \varphi$, salvo, nelle formule, qualche cambiamento di segno (che sarà, a suo luogo precisato) dipendente dalle convenzioni d'orientamento.

Un piano σ dello spazio, non parallelo ai dati, li taglia secondo due rette a, b determinanti un angolo rettilineo *completo*; ed anche per la misura di questo assumeremo il valore $\approx \leq \frac{\pi}{2}$, per quanto sia del tutto indifferente considerare in sua vece $\pi - \approx$.

Poichè i piani dello spazio sono ∞^2 , ed i valori di \approx, ∞^1 , è chiaro che il sistema Σ formato dai piani che tagliano il diedro dato secondo l'angolo \approx è doppiamente infinito. D'altronde due piani paralleli segano angoli eguali; quindi Σ si compone di ∞^1 fasci impropri di piani. È la figura duale d'un cono.

Volendo, come conviene, isolare un piano per ogni giacitura, basterà limitarsi a considerare quei piani che passano per un punto S fissato sullo spigolo z . Essi sono ∞^1 , quindi formano un *inviluppo conico* \mathcal{V} , che, come si vedrà, è (generalmente) *ellittico*, di classe 4, aderente ad un cono di 8° ordine, colle altre caratteristiche plückeriane di cui appresso. Con ciò la questione si circoscrive nell'ambito *metrico* della *stella* di centro S ; per opportunità di richiamo, di fronte alle prossime trasformazioni, diremo che, in tale accezione, la si considera sotto « l'aspetto A ».

2. Notoriamente *nella stella le proprietà metriche sono dualizzabili*; così è dunque della nostra questione, la quale equivale pertanto sostanzialmente all'altra: Date due rette a, b uscenti dal punto S e formanti angolo (acuto) φ studiare il cono riempito dalle rette s (uscenti da S) dalle quali a, b son proiettate secondo due piani formanti angolo (diedro) \approx .

Più espressivi e vantaggiosi aspetti della nostra questione, meglio adeguati anche alla sua trattazione analitica, si guadagnano attraverso l'*interpretazione non euclidea della geometria metrica della stella*, a norma della quale quella geometria è una *metrica ellittica* avendo per *assoluto* il relativo cono isotropo (di vertice S)

e può descriversi come geometria d'un piano *ellittico* attraverso ad una nota identificazione convenzionale ⁽¹⁾.

Ci converrà materializzare tale identificazione segnando addirittura la nostra stella con un piano π , che assumeremo perpendicolare a z in un punto O , rispetto al quale S , abbia, su z , l'ascissa 1 (con che O è in fondo arbitrario, sulla debita semiretta, e resta fissata l'unità di misura). L'intersezione del cono isotropo col piano π è allora il circolo K di centro O e raggio eguale all'unità immaginaria i .

Il circolo K , assunto come *assoluto*, individua sul piano π una *metrica ellittica*, e questa non è altro che la metrica (ordinaria) della stella S , *trasportata ivi per sezione*. Il trasporto esige gli adeguati adattamenti del linguaggio; principalmente va avvertito che all'*angolo* \varkappa di due rette a, b della stella S deve sostituirsi (nella metrica ellittica di π) la *distanza* delle relative tracce A, B . Questa distanza, nelle nostre condizioni, resta indeterminata per il segno (dipendente dall'orientamento della retta AB) e per multipli di π (*lunghezza della retta* nella metrica ellittica), cioè, dati A, B è suscettibile di infiniti valori del tipo $\pm \varkappa + k\pi$ (k intero), restandone però sempre determinato il valore positivo $\leq \frac{\pi}{2}$. Avver-

tasi che i valori predetti dell'argomento con quelli per cui la funzione $m^2 = \operatorname{tg}^2 \varkappa$ (e così $\sin^2 \varkappa, \cos^2 \varkappa, \cos 2\varkappa$ che se ne deducono mediante opportune trasformazioni lineari) assume uno stesso valore, talchè il valore di m^2 caratterizza la coppia AB a meno di congruenze (movimenti) del piano ellittico.

Tornando al nostro problema, indichiamo con x, y le tracce su π delle facce α, β del diedro (che, più avanti assumeremo come assi coordinati) e supponiamole orientate in modo che l'angolo delle due semirette positive x, y (nell'ordine, e nel verso positivo delle rotazioni) ⁽²⁾ sia l'angolo acuto φ , come in figura. Allora se σ è un piano della stella S che tagli il nostro diedro secondo un angolo ab di mi-

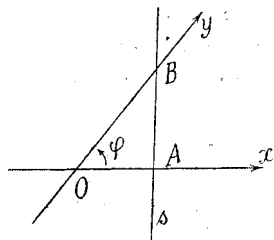


Fig. 1

(1) Le nozioni di geometria ellittica qui e più avanti richiamate, si trovano esposte in tutti i trattati e monografie di Geometria non euclidea. Cfr. p. es. G. FANO, *Geometria non euclidea*. [Monografia per cura del Cons. Naz. Ricerche (Bologna, Zanichelli, 1935)]. Alla fine di questo volume sono raccolte indicazioni bibliografiche abbastanza estese.

(2) Che è individuato, sul piano π , dall'orientazione dell'asse z , al seguito delle solite convenzioni.

sura π , indicate con A, B le tracce di a, b , i due punti A, B avranno, nella metrica ellittica testè introdotta in π , la *distanza* \simeq , onde la traccia su π dell'inviluppo conico Ψ , è l'*inviluppo* Γ delle rette s sulle quali gli assi xy intercettano un segmento di data lunghezza (non euclidea) \simeq . Questo è l'aspetto B del nostro problema.

Se indichiamo con L il luogo aderente a Γ , ritroviamo in questo una generalizzazione non euclidea della nota *asteroide*. Ma, come si vedrà, le caratteristiche algebriche e grafiche ne sono alquanto diverse (cfr. per le prime la nota (5)).

La trasformazione per dualità del precedente aspetto (legittima nella metrica ellittica) ne mette in vista un terzo, che richiamemo come *aspetto C*. Alle due rette x, y si sostituiscono due punti X, Y , (aventi la distanza φ), ed all'inviluppo Γ , il *luogo C dei punti P dai quali il segmento XY, è visto sotto angolo (non euclideo) \simeq* .

Nella *metrica euclidea* quel luogo (tenuto conto della sostituibilità di \simeq con $\pi - \simeq$), è notoriamente una coppia di cerchi segantisi nei punti X, Y , e simmetrici rispetto alla loro congiungente, quindi, complessivamente, una quartica con due punti doppi in X, Y . Ebbene, come andiamo ora a vedere, anche nel caso non euclideo si ottiene una quartica con analogo comportamento, ma, generalmente *irriducibile*.

3. La considerazione del problema sotto l'aspetto B (e, subordinatamente, A) indica spontaneamente una *generazione* dell'inviluppo Γ . Fissato un punto A sull'asse x , vi sono sull'asse y due punti B che hanno da esso la distanza \simeq , e sono le due intersezioni di y col circolo (non euclideo) γ (nell'aspetto A , *cono rotondo* di asse a) di centro A e raggio \simeq ; ed analogamente per ogni punto B di y , due punti A . Rimane così posta fra gli assi x, y una corrispondenza algebrica (2, 2): e le rette di Γ altro non sono che le congiungenti gli elementi omologhi di tal corrispondenza. Tanto basta per concludere, come già avvertito, che Γ ha la *classe* 4⁽³⁾.

Quando il punto A , pensato sopra un asse, va a cadere in O , i due punti corrispondenti sull'altro asse restano distinti, simmetrici rispetto ad O ed alla distanza \simeq da esso. Se ne deduce che gli assi x, y sono *rette doppie* dell'inviluppo Γ , cioè per il

(3) Aggiungasi, per il lettore meno esperto, che a tal conclusione si perviene proiettando la corrispondenza considerata da un punto generico Q del piano. Si ottiene allora, nel fascio Q , una corrispondenza (2, 2), la quale, per il principio di CHASLES, ha quattro rette unite, che sono precisamente le rette di Γ uscenti da Q .

luogo aderente L , *bitangenti*, a contatti distinti, che indicheremo, ovvio restando il significato delle notazioni, con T_x, T_{-x}, T_y, T_{-y} . Dualmente la curva C è una *quartica* con due *nodi* nei punti X, Y .

Un'avvertenza speciale va fatta per il caso in cui \varkappa è un *angolo retto*. Allora il circolo γ si riduce ad una retta doppia (la *polare assoluta* di A) luogo dei *punti ortogonali* ad A (nell'aspetto A anzichè un cono rotondo, si ha il piano della stella S (perpendicolare ad a), ed alla predetta corrispondenza (2, 2) si sostituisce la corrispondenza proiettiva (1, 1) fra le coppie di punti di x, y *coniugate* rispetto all'assoluto K . L'inviluppo Γ si riduce ad un *inviluppo conico* Λ *doppio*, aderente ad una conica, che come si vede facilmente, (salvo il caso che anche φ sia retto, del quale tratteremo tra poco) e con riferimento alla metrica euclidea di π , è un'iperbole I (*Iperbole degli angoli retti*) i cui rami scorrono negli angoli ottusi degli assi x, y .

Abbiamo visto che Γ ha due rette doppie x, y ; può averne delle altre? Esaminiamo il problema per \varkappa *reale*, diverso da 0 e da $\frac{\pi}{2}$, ammettendo, per evitare divagazioni, l'*irriducibilità* di Γ , che sarà appresso confermata.

Poniamoci dal punto di vista duale (aspetto C). Se la quartica C ch'è reale, per la posizione stessa del problema, ammette, oltre X, Y , un altro punto doppio U , questo (stante l'irriducibilità) non potrà essere che unico, e quindi reale: ed allora nella corrispondenza (2, 2) tra i due fasci X, Y , le due rette $p = XU, q = YU$ si si corrisponderanno doppiamente. Ciò implica, riapplicando la dualità, cioè tornando all'aspetto B , l'esistenza di due punti reali P, Q sugli assi x, y che si corrispondono doppiamente, talchè il circolo γ di centro P e raggio \varkappa tocca l'asse y in Q , e scambievolmente. In definitiva la retta PQ dell'inviluppo Γ è *perpendicolare* ad entrambi gli assi x, y , cioè è la *polare assoluta* dell'origine O .

Proiettando da S , cioè risalendo infine all'aspetto A , si ottengono due rette p, q formanti angolo \varkappa il cui piano è ortogonale tanto ad α che a β (4), talchè l'angolo \widehat{pq} è una *sezione normale* del diedro dato, ed infine $\varkappa = \varphi$. Si conclude in definitiva che, per \varkappa *reale* diverso da 0 e da $\frac{\pi}{2}$ l'inviluppo Γ ammette una *terza retta doppia* (diversa dagli assi x, y) soltanto quando $\varkappa = \varphi$, quindi, in ogni altro caso, è *ellittico* (di genere 1) (5).

(4) A conferma si osservi che, nella *metrica euclidea* di π , P e Q sono i *punti impropri* degli assi x, y .

(5) Si noti che il ragionamento che ci ha condotti a questa conclusione non è valido nella *metrica euclidea*, in quanto esso poggia sull'ipotesi

Siamo così in possesso, per il caso generale, di tre fra i caratteri plückeriani [n, m (ordine e classe) d, τ (punti doppi e bitangenti) k, i (cuspidi e flessi) del luogo L aderente a Γ ($m=4, \tau=2, i=0$), quanti bastano per dedurne, col tramite delle formule di PLUECKER, i restanti. E così troviamo:

$$(1.1) \quad n=8, \quad m=4, \quad d=8, \quad k=12, \quad \tau=2, \quad i=0.$$

Sappiamo ancora che le due bitangenti sono reali, a contatti reali: per quanto concerne le questioni di realtà e di posizione inerenti agli altri caratteri, v'ha, come si vedrà, materia per una approfondita discussione.

4. Le osservazioni precedenti si illustrano e si completano introducendo la classica espressione logaritmica della distanza nella metrica ellittica, la quale ci fornirà tra poco il punto di partenza per la trattazione analitica.

Se A, B sono i due punti, ed M, N le intersezioni (immaginarie coniugate) della loro congiungente coll'assoluto K , l'espressione in parola è

$$(1.2) \quad \varkappa = \frac{i}{2} \log (ABMN),$$

o, sotto altra forma, talvolta più opportuna

$$(1.3) \quad e^{-2i\varkappa} = (ABMN).$$

Va ricordato che (quando A, B son reali), il birapporto $\beta = (ABMN)$ è coniugato del suo reciproco, che si ottiene scambiando M con N , quindi è un numero complesso di modulo 1, onde le nostre formule danno per \varkappa valori reali. E questi valori, fissatone uno, \varkappa , sono precisamente del tipo $\pm \varkappa + k\pi$, cioè rispecchiano con tutta precisione la già avvertita indeterminazione della distanza; restando, quella del segno, legata all'ordinamento della coppia MN (che. a

implicita che il cerchio γ col centro in un punto *reale* P dell'asse x , e raggio ϑ , sia sempre *irriducibile*. Ora ciò si verifica nella metrica ellittica: mentre nella metrica euclidea, quando P è improprio, quel cerchio degenera nella retta impropria doppia, la quale risulta sempre una terza retta doppia (isolata coi contatti su L nei punti ciclici) di Γ ; talchè allora Γ è *sempre razionale*. L'equazione di Γ che, nel caso di assi ortogonali, e per il valore a della distanza, è $u^2 + v^2 = au^2v^2$ lo conferma senz'altro (la retta impropria $u=v=0$ è doppia). Di conseguenza il luogo aderente L è una

curva razionale del 6° ordine (*asteroide* di equazione $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ sotto forma irrazionale, $27a^2x^2y^2 = (a^2 - x^2 - y^2)^3$ sotto forma razionale), mentre invece nel nostro caso è una curva ellittica di 8° ordine.

sua volta, può legarsi all'orientamento della retta AB) e quella dell'aggiunta di multipli di π , alla nota polidromia del logaritmo.

Ad un involuppo Γ del nostro problema risponde un valore della distanza, colla predetta indeterminazione, quindi due valori reciproci per il birapporto β , e viceversa; onde gl'inviluppi stessi restano biunivocamente legati ai valori dell'espressione $\beta + \frac{1}{\beta}$, cioè di $e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}$, ed infine, per il tramite della formula di EULERO, di $\cos 2z$. Sappiamo già che, in tale funzione, al $\cos 2z$ può sostituirsi la $\operatorname{tg}^2 z = m^2$, e d'altronde $\operatorname{tg} z = i \frac{1 - e^{2i\theta}}{1 + e^{2i\theta}}$ cambia soltanto di segno per lo scambio di z con $-z$.

Rileviamo infine che le nostre formole hanno senso (cioè individuano z coll'avvertita indeterminazione) per ogni valore reale e complesso di β , eccezion fatta per i due valori (reciproci) 0 ed ∞ , giacchè notoriamente l'esponenziale non assume mai questi due valori eccezionali. Con riserva di qualche ulteriore precisazione, diremo che in questi casi l'angolo z è *indeterminato* ⁽⁶⁾.

Guardando all'aspetto *proiettivo* del nostro problema, emergente dall'espressione della distanza come funzione, di un birapporto, se ne segnala subito una generalizzazione, che, a sua volta, è suscettibile d'interpretazioni metriche. Nel nostro caso le due coppie di punti AB, MN sono le intersezioni d'una retta del piano con due coniche, delle quali la prima è degenera (nella coppia di rette x, y) la seconda, K , irriducibile; più in generale le due coniche potranno pensarsi entrambe irriducibili, o addirittura qualunque, ed è chiaro che se una delle due (reale impropria, cioè priva di punti reali) conserva il significato di *assoluto* d'una metrica ellittica, l'inviluppo Γ è *quello delle rette sulle quali una conica stacca segmenti di data lunghezza*. Nell'accezione duale, in cui si ricerca il luogo C dei punti P per i quali le coppie di tangenti ab, mn mandate a due coniche fisse hanno birapporto $(abmn)$ assegnato (sempre da identificarsi col reciproco) il problema ha significato metrico tanto nel caso non euclideo ellittico ⁽⁷⁾ quanto in quello euclideo, nel quale una delle due coniche degenera, come involuppo, in due fasci di rette immaginari coniugati (fasci iso-

⁽⁶⁾ Ammessa formalmente la validità delle formole di EULERO anche quando $e^{i\theta}$ è nullo od infinito, si trovano per il seno e coseno valori infiniti, per la tangente i due valori $\pm i$.

⁽⁷⁾ Ed anche, con qualche avvertenza che lasciamo al lettore, nel caso iperbolico (metrica di LOBACHEFSKI).

tropi), e ciò perchè l'espressione dell'angolo come logaritmo d'un birapporto (duale della (1.2)) sussiste anche nel caso euclideo (formula di LAGUERRE). Il luogo C è allora quello dei punti dai quali una data conica è vista sotto angolo assegnato: problema pertrattato nel caso euclideo. E sorvoliamo su generalizzazioni ulteriori, quale ad es. quella di sostituire alla coppia di coniche una quartica arbitraria.

Chiusa la digressione, ritorniamo al nostro problema, sotto l'aspetto B , e guardiamo all'insieme di tutti gli involuppi Γ relativi ad un fissato φ , ed agl'infiniti valori, anche, come ora conviene, complessi, dell'angolo \varkappa . Una retta s generica del piano appartiene ad *un solo* Γ , che essa determina per il tramite della distanza \varkappa fra le sue intersezioni A, B cogli assi; pertanto quegli involuppi formano un fascio Φ , come parametro del quale può assumersi, per quel che si è detto (e come sarà confermato dalla rappresentazione analitica) la funzione $m^2 = \operatorname{tg}^2 \varkappa$.

Sono notevoli ed espressive le *degenerazioni dell'involuppo* 1 che si ottengono per i valori $-1, +1, (0, \infty)$ del birapporto β :

1) $\beta = -1$. Allora la quaderna $(ABMN)$ è armonica, e l'angolo \varkappa è retto. Sappiamo dal n. 3 che Γ degenera nell'involuppo conico doppio Λ , aderente all'iperbole I degli angoli retti.

2) $\beta = +1$. Allora l'angolo \varkappa è nullo; e ciò può aversi tanto per la coincidenza di A con B , quanto per quella di M con N . L'involuppo Γ degenera nel fascio di centro O (da contarsi due volte) e nell'involuppo delle tangenti all'assoluto K . Apprendiamo così, guardando all'aspetto A , che i piani passanti per S e secanti il dato diedro secondo un angolo nullo non son soltanto quelli passanti per lo spigolo, ma anche tutti quelli tangenti al cono isotropo.

3) $\beta = 0$ od ∞ : l'angolo \varkappa è indeterminato. Il caso si presenta quando uno dei due punti A, B coincide con uno dei due punti M, N ; quindi Γ degenera nei quattro fasci di rette che hanno per centri le intersezioni dei due assi x, y coll'assoluto K . Sotto l'aspetto A vi fanno riscontro i quattro fasci di piani che hanno per assi le rette isotrope (uscanti da S) sui due piani dati α, β .

Avvertasi che le tangenti a K nei centri dei quattro fasci predetti (punti degli assi di ascissa $\pm i$) sono rette basi del fascio Φ , in quanto appartengono ovviamente ai due involuppi degeneri 2), 3). L'appartenenza ad 1) consegue da ciò che quelle tangenti staccano sui due assi due punti coniugati, quindi omologhi nella corrispondenza proiettiva che genera l'involuppo Λ .⁽⁸⁾

(8) Si può andare più in là, notando che, su ciascuna delle quattro rette basi considerate, è fisso (e cade nel centro del relativo fascio 3)) anche

Un' ultima osservazione relativa al caso in cui gli angoli φ e ε sono entrambi retti. Allora gli assi x , y sono coniugati rispetto all' assoluto K , e la corrispondenza proiettiva or ricordata degenera, in guisa che a tutti i punti di y corrisponde su x il polo P dell'asse y stesso, ed analogamente a tutti i punti di x uno stesso punto Q . L' involuppo Λ si spezza nei due fasci di centri P , Q , e ciò riportandoci all' aspetto A , viene a dire che i piani seganti un diedro retto secondo un angolo pure retto e passanti per un punto S dello spigolo, son quelli dei due fasci aventi per assi i lati p , q della sezione normale del dato diedro in S . Proprietà ben nota e di uso corrente nella geometria descrittiva. ⁽⁹⁾

§ 2. Sviluppi formali. Separazione preliminare dei due tipi reali. Intervento della riemanniana dell' ente ellittico Γ .

5. Incominciamo col procurarci l' equazione dell' involuppo Γ con riferimento al sistema cartesiano x , y prefissato, e, naturalmente alla metrica euclidea del piano π . ⁽¹⁰⁾

il punto di contatto dell' involuppo Γ , talchè quelle quattro rette *contano ciascuna due volte* nel gruppo delle sedici rette basi di Γ (le altre otto sono i due assi x , y contati ciascuno quattro volte). Basta notare che esse sono comuni alla parte semplice (involuppo delle tangenti a K) dell' involuppo Σ ed all' involuppo *doppio* Λ ; ricordando, dualmente, che se un fascio di curve piane contiene una curva doppia φ^2 i punti d' incontro di φ con una curva semplice f del fascio, sono punti di contatto con f di tutte le curve del fascio (fatta eccezione per la φ semplice).

La cosa si illustra osservando che, per ciascuna, t , delle quattro tangenti considerate, (che tocchi in A il circolo K e incontri l' altro asse in B) il *birapporto* β è *effettivamente indeterminato*, in quanto *tre* dei quattro punti A , B , M , N , e precisamente A , M , N coincidono; donde l' appartenenza a tutti gl' involuppi Γ . Se si tien presente ancora che il circolo non euclideo di raggio ϑ col centro in A , *degenera* per l' attuale posizione di A , nella retta t contata due volte, talchè i due omologhi di A nella corrispondenza (2, 2) che genera Γ coincidono entrambi in B , si vede che A , in quanto può considerarsi come intersezione di due rette infinitamente vicine di Γ , è il relativo punto di contatto sulla t . L' eccezione rilevata in parentesi alla fine del precedente capoverso, spiega anche perchè l' iperbole I possa toccare t , come in effetto, in un punto diverso da A (la I non passa per A).

⁽⁹⁾ D' ordinario sotto la forma seguente: Condizione necessaria e sufficiente affinchè le proiezioni ortogonali su di uno stesso piano, di due rette perpendicolari siano anch' esse perpendicolari, è che una (almeno) delle due rette date sia parallela al piano di proiezione. Cfr. le mie *Lezioni di geometria descrittiva* (2^a ediz., 3^a ristampa), (Padova, Cedam, 1939), pag. 79.

⁽¹⁰⁾ Il riferimento da noi prescelto non è soltanto il più naturale, ma anche, a ragion veduta, il più opportuno per la semplicità delle for-

Intanto, per la nota formula che esprime, in coordinate cartesiane oblique, il quadrato della distanza di un punto dall'origine, l'equazione del nostro assoluto K (che, si ricordi, è il cerchio di centro O e raggio i) è

$$(2.1) \quad x^2 + y^2 + 2xy \cos \varphi + 1 = 0.$$

Se una retta s di coordinate plückeriane u, v quindi di equazione

$$(2.2) \quad ux + vy + 1 = 0,$$

stacca sugli assi i due punti A, B , e sul circolo K i punti M, N , assunto sulla s il rapporto $\mu = \frac{y}{x}$ quale coordinata proiettiva, si avranno per quei punti i valori $0, \infty, \mu_1, \mu_2$, essendo i due ultimi le radici dell'equazione

$$(2.3) \quad \mu^2(v^2 + 1) + 2\mu(uv \cos \varphi) + u^2 + 1,$$

che si ottiene eliminando $\frac{1}{x}$ dalle (2.1) (2.2), dopo averle divise, la prima per x^2 , la seconda per x .

Dopo ciò la formula fondamentale (1.3) si scrive

$$(2.4) \quad e^{-2i\theta} = (0, \infty, \mu_1, \mu_2) = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

e non v'ha che sostituire al posto di $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ l'espressione, in funzione di u, v , dedotta dalla (2.3) per ottenere la cercata equazione dell'inviluppo Γ . Ciò fa passare attraverso ad un'irrazionalità, che si può evitare in partenza, combinando per somma la (2.4) colla sua (dicasi abbreviamente) reciproca, il che porge

$$e^{-2i\theta} + e^{2i\theta} = 2 \cos 2\tilde{z} = \frac{\mu_1}{\mu_2} + \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{\mu_1 \mu_2} = \frac{(\mu_1 + \mu_2)^2}{\mu_1 \mu_2} - 2,$$

indi

$$2 + 2 \cos 2\tilde{z} = 4 \cos^2 \tilde{z} = \frac{(\mu_1 + \mu_2)^2}{\mu_1 \mu_2},$$

ed infine sostituendo a $\mu_1 + \mu_2$ e $\mu_1 \mu_2$ i valori forniti dalla (2.3)

$$(2.5) \quad (u^2 + 1)(v^2 + 1) \cos^2 \tilde{z} = (uv + \cos \varphi)^2$$

ovvero, sotto altra forma, che per talune opportunità converrà aver presente, e che se ne deduce col porre $\cos^2 \tilde{z} = \frac{1}{1 + m^2}$, ($m = \operatorname{tg} \tilde{z}$)

$$(2.6) \quad u^2 + v^2 - 2uv \cos \varphi + \sin^2 \varphi = m^2(uv + \cos \varphi)^2.$$

mule. L'assunzione di assi ortogonali, ad es. delle bisettrici dei nostri x, y complica le cose assai di più.

Controlliamo subito le *degenerazioni* avvertite al numero precedente.

1°) $\varkappa = \frac{\pi}{2}$, quindi $\cos \varkappa = 0$. Si ottiene l'involuppo conico Λ di equazione

$$(2.7) \quad uv + \cos \varphi = 0.$$

contato due volte.

2°) $\varkappa = 0$. La (2.6) per $m = 0$ dà subito

$$(2.8) \quad u^2 + v^2 - 2uv \cos \varphi + \sin^2 \varphi = 0.$$

ch'è l'equazione dell'involuppo aderente all'assoluto K . La rappresentazione non omogenea (per le coordinate u, v) non mette in vista il fascio doppio di centro O (le cui rette hanno coordinate infinite) che, come sappiamo, fa parte dell'attuale involuppo.

3°) \varkappa indeterminato. Questo caso s'interpreta, conformemente all'avvertenza della nota (6), facendo infinito il $\cos \varkappa$, ovvero $m = \pm i$, e conferma lo spezzamento di Γ nei quattro fasci

$$(2.9) \quad (u^2 + 1)(v^2 + 1) = 0, \quad \text{cioè } u = \pm i, \quad v = \pm i,$$

coi centri nei punti d'intersezione $(x = \pm i, y = 0)$ $(x = 0, y = \pm i)$ dell'assoluto K cogli assi.

Aggiungiamo alcune *osservazioni*:

a) Le equazioni (2.5) (2.6) restano invariate per lo scambio di \varkappa con $\pi - \varkappa$, come già preavvisato (n. 1). Invece lo scambio di φ con $\pi - \varphi$ fa mutar segno ai termini che contengono $\cos \varphi$; l'equilibrio si ristabilisce scambiando u con v e poi mutando il segno di u , cioè fissando, com'è di dovere, le designazioni degli assi ed il loro orientamento in modo che l'angolo dei nuovi semiassi positivi x, y (fisso restando il verso delle rotazioni positive) sia $\pi - \varphi$.

b) Le quattro *rette basi del fascio* Φ (da contarsi ciascuna due volte) segnalate al n.° precedente, sono quelle comuni ai due involuppi (2.7), (2.8) quindi hanno le coordinate

$$(u = \pm i, v = \pm i \cos \varphi), \quad (u = \pm i \cos \varphi, v = \pm i),$$

colla solita associazione dei segni superiori ed inferiori. La verifica analitica del già indicato loro comportamento è del tutto elementare.

c) I punti di contatto sugli assi x, y , sono, come sappiamo dal n.° 3, gli omologhi dell'origine O nella corrispondenza (2.2) che genera Γ , quindi hanno, su ciascun asse, l'ascissa non euclidea $\pm \varkappa$. La loro ascissa euclidea è invece $\pm m = \pm \operatorname{tg} \varkappa$ come vien subito dal notare che quei punti son tracce su φ di rette uscenti da S e formanti angolo \varkappa coll'asse z .

d) Quando $\varpi = \varphi$ l'equazione del nostro involuppo diviene

$$(2.10) \quad u^2 v^2 \sin^2 \varpi - (u^2 + v^2) \cos^2 \varpi + 2uv \cos \varpi = 0,$$

e non contiene termini di grado inferiore al secondo. Ciò indica, conformemente al n.º 3, che Γ acquista la nuova retta doppia $u = v = 0$ (retta impropria) ed è quindi razionale. Ritourneremo più avanti sulla relativa uniformizzazione.

e) Infine, subordinatamente, se $\varpi = \varphi = \frac{\pi}{2}$ si cade sull'involuppo $u^2 v^2 = 0$, col significato avvertito alla fine del n.º precedente.

6 Per ragioni di opportunità, non esclusa quella dell'adattamento intuitivo, ci converrà, nel seguito di questo paragrafo, e nel successivo, far riferimento al *luogo duale* dell'involuppo Γ , che abbiamo già indicato con C .

Dualizzeremo sostituendo alle u, v le x, y ; con che, fisso restando il riferimento, si viene a *polarizzare* rispetto alla conica $x^2 + y^2 + 1 = 0$, della quale gli assi x, y son due diametri coniugati. Quindi la trasformazione muta ciascun asse nel punto improprio dell'altro, ecc.

Facendo la sostituzione indicata le (2.5) (2.6) porgono l'equazione di C sotto una delle forme seguenti

$$(2.11) \quad (x^2 + 1)(y^2 + 1) \cos^2 \varpi = (xy + \cos \varphi)^2,$$

$$(2.12) \quad x^2 + y^2 - 2xy \cos \varphi + \sin^2 \varphi = m^2(xy + \cos \varphi)^2,$$

alle quali, ordinando rispetto ad y aggiungeremo la terza

$$(2.13) \quad y^2(m^2x^2 - 1) + 2xy \cos \varphi(1 + m^2) + m^2 \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi - x^2 = 0.$$

Una volta scritte queste equazioni avvertiamo che, per l'uso che ne faremo, la conservazione del riferimento primitivo è insensenziale; il lettore, se crede, potrà anche raffigurarsi gli assi ortogonali. Avvertiamo ancora che d'ora in poi, salvo esplicita avvertenza, l'angolo ϖ si supporrà *reale*.

La nostra C è una quartica con due *punti doppi nodali* nei punti impropri degli assi (come si vede dalla (2.12) le relative tangenti sono $x = \pm \frac{1}{m^2}$, $y = \pm \frac{1}{m^2}$) e colle altre caratteristiche che risultano per dualità da quelle di Γ . Si mettono subito in evidenza su di essa quattro serie lineari g_2^1 la cui considerazione ci sarà variamente giovevole; quelle segate dai fasci $x = \text{cost}$, $y = \text{cost}$ coi

centri nei punti doppi, e le due simmetrie ortogonali ($x' = y, y' = x$; $x' = -y, y' = -x$) rispetto alle bisettrici degli assi. ⁽¹¹⁾

Un noto procedimento, che ora richiameremo, conduce a trasformare cremonianamente la nostra curva in una $y^2 = f(x)$ in guisa che l'immagine della prima g_2^1 sia data dalla simmetria $x' = x, y' = -y$.

In generale se è data una curva iperellittica di equazione

$$Ay^2 + 2By + C = 0,$$

con A, B, C polinomi in x , tutto si riduce ad osservare che si ha

$$(Ay + B)^2 = D(x), \quad (D(x) \equiv B^2 - AC)$$

dopo di che, ferma restando la x , la trasformazione

$$w = Ay + B, \quad \left(y = \frac{w - B}{A} \right)$$

riduce l'equazione data alla forma

$$w^2 = D(x).$$

Nel caso della (2.13) si trova, con qualche calcolo, la seguente espressione del discriminante:

$$(2.14) \quad D(x) \equiv m^2(x^2 + 1)(x^2 + k^2),$$

essendosi posto

$$(2.15) \quad k^2 = 1 - \frac{\sin^2 \varphi}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

La costante k^2 qui introdotta, ha, in tutto il seguito, funzione fondamentale, ed interviene essenzialmente a discriminare i due casi $\varphi > \frac{\pi}{2}$ e $\varphi < \frac{\pi}{2}$ che presentano caratteristiche reali tipicamente distinte. Nel primo caso essa è positiva < 1 , e si converrà che k indichi il valor positivo della sua radice; nel secondo essa è negativa, e le sue radici s'indicheranno con $\pm ih$ (h positivo) talché sarà $k^2 = -h^2$.

L'equazione (2.13) si muta pertanto nella

$$(2.16) \quad w^2 = (x^2 + 1)(x^2 + k^2),$$

mediante la trasformazione

$$(2.17) \quad y = \frac{mw - x \cos \varphi (1 + m^2)}{m^2 x^2 - 1},$$

⁽¹¹⁾ La simmetria centrale $x' = -x, y' = -y$ prodotto di queste due induce invece sulla C una γ_2^4 ellittica, come consegue dalle note proprietà delle trasformazioni birazionali di una curva ellittica in sé.

colla quale resta inglobato in w^2 anche il fattore m^2 di $D(x)$. Si ottiene così un'altra quartica (2.16), trasformata cremoniana reale di C , che verrà indicata con \bar{C} .

È da avvertire che il nostro procedimento non è più corretto per $z=0$ ($m=0$, $k=\infty$) e $z=\frac{\pi}{2}$ ($m=\infty$) ma questi casi sono ormai completamente sviscerati, e non hanno più interesse. In ogni altro caso, salvo per $z=\varphi$ ($k=0$) le quattro radici del discriminante sono distinte, e siccome esse forniscono, sull'asse x , i punti di diramazione della funzione w di x , così la curva \bar{C} , e di conseguenza la C , è (irriducibile) ed *ellittica* come già segnalato al n.º 4.

Poichè nel passaggio dalla C alla \bar{C} la x non muta, così i quattro valori di x testè presi in considerazione (che sono $\pm i$, $\pm ik$ per $z > \varphi$, e $\pm i$, $\pm h$ per $z < \varphi$) forniscono le ascisse dei quattro punti doppi della g_2^1 segata su C dal fascio delle rette $x = \text{cost}$. Ci converrà fissarne uno, una volta per sempre, e sceglieremo quello di ascissa $+i$, che come si trae subito dalla (2.11) ha l'ordinata $y = i \cos \varphi$, e, nel seguito, s'indicherà con X . Trasformandolo colla simmetria rispetto alla bisettrice $x = y$ che scambia fra di loro le due g_2^1 segate dalle rette $x = \text{cost}$, $y = \text{cost}$, se ne deduce il punto Y ($i \cos \varphi$, i) doppio per la seconda g_2^1 .

Per $z = \varphi$, quindi $k = 0$, la \bar{C} , ch'è *razionale* ed ha l'equazione

$$(2.18) \quad w^2 = x^2(x^2 + 1),$$

si lascia subito ricondurre alla conica

$$(2.19) \quad \zeta^2 = x^2 + 1,$$

mediante la trasformazione $w = x\zeta$; e l'*uniformizzazione* (razionale) del problema si consegue subito facendo $\zeta = x + t$ (cioè insomma segnando la conica col fascio delle rette parallele all'asintoto $\zeta - x = 0$), deducendone

$$(2.20) \quad x = \frac{1-t^2}{2t}, \quad \zeta = \frac{1+t^2}{2t}, \quad w = \frac{1-t^2}{4t^2},$$

ed infine, sostituendo in (2.17), l'espressione di y , che non val la pena di scrivere. Anche per questo caso si può porre, e risolvere per più vie, un problema di *simmetrizzazione della rappresentanza parametrica* inteso nel senso in cui, per il caso ellittico, viene posto e risolto al prossimo paragrafo. Lo proponiamo al lettore.

7. Col riferimento alla \bar{C} si presenta fin d'ora l'occasione per risolvere un *primo problema di realtà*; quello riguardante il *numero dei rami* (in senso invariante) del nostro ente ellittico reale,

numero che notoriamente può essere 1 o 2. È indifferente indagare sull'involuppo Γ (sul luogo aderente L) o sulla curva duale C , o infine sulla \bar{C} , dal momento che quegli enti si equivalgono per trasformazioni birazionali *reali*, e quindi hanno lo stesso numero di rami. Ci riferiremo pertanto alla \bar{C} .

Nella questione interviene come elemento discriminatore il segno della costante reale k^2 , e son pertanto da distinguere due casi:

I) $k^2 > 0$ ($\bar{z} > \varphi$). Il secondo membro della (2.16) è positivo per tutti i valori di x , quindi ad ogni valore reale di x corrispondono due valori reali di w opposti di segno. La nostra \bar{C} ha quindi *in senso affine*, due rami disposti come nella Fig. 2; non resta però escluso che, nella singolarità in $w = \infty$ (tacnodo) essi non possano fondersi, in senso invariante, in un solo ramo. Vedremo che ciò non succede, e che *i rami sono effettivamente due*.

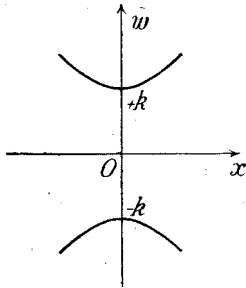


Fig. 2

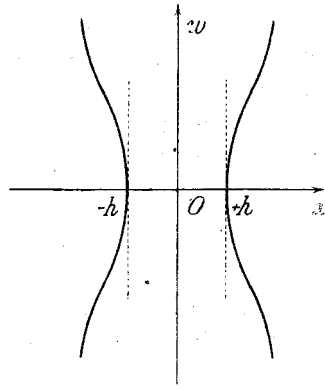


Fig. 3

II) $k^2 < 0$ ($\bar{z} < \varphi$) ($k^2 = -h^2$). Il polinomio a secondo membro di (2.16) è negativo per tutti i valori di x del segmento $-h, +h$, nullo per $x = \pm h$, positivo per i valori esterni a quel segmento. La curva ha manifestamente la forma della Fig. 3, e quindi presenta ancora, *in senso affine*, due rami, ma, come vedremo subito essi si fondono in $w = \infty$, talchè *in senso invariante la curva ha un sol ramo*.

Le precisazioni indicate si conseguono elegantemente, evitando l'analisi diretta del comportamento nella singolarità, col ricorso alle immagini dei punti reali di \bar{C} sulla relativa riemanniana R distesa sul piano complesso doppio x ($x = x_1 + ix_2$). Questa può fungere anche da riemanniana della C , e con tal riferimento interverrà al paragrafo seguente.

CASO I. - I quattro punti di diramazione cadono in $x = \pm i$, $x = \pm ik$, quindi (tenuto conto che $k < 1$) son disposti come in figura. Si noti che il punto X è proprio l'immagine del punto $(i, i \cos \varphi)$ di C indicato colla stessa lettera al paragrafo precedente: l'indicazione di Y serve agli scopi del prossimo paragrafo.

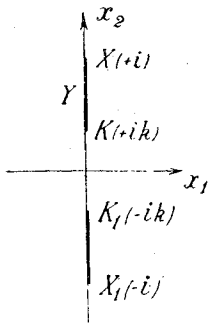


Fig. 4

Per quel che si è visto poc'anzi, i punti reali della curva sono rappresentati su R dai punti dell'asse reale x_1 , considerati su ciascuno dei due fogli: e poichè i tagli di diramazione attraverso ai quali si pensano collegati quei fogli possono suppersi eseguiti lungo i due segmenti, XK , X_1K_1 dell'asse immaginario, così

resta evidente che (quali immagini dei punti reali di \bar{C}) si ottengono *due circuiti distinti*.

CASO II. - I punti di diramazione cadono in $x = \pm i$, $x = \pm h$, come in figura, ed i punti reali della curva hanno per immagini i punti dei due segmenti *infiniti* K , K_1 dell'asse reale, considerati sui due fogli. Poichè K e K_1 son punti di collegamento dei fogli stessi, e d'altronde i tagli si possono pensare effettuati lungo i due segmenti XK , X_1K_1 , così ne risulta

che i due predetti segmenti infiniti dell'asse reale si riuniscono a formare un *unico circuito*.

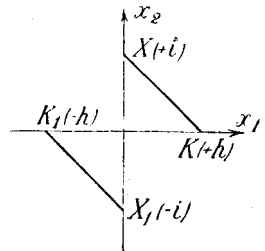


Fig. 5

(continua)