Bollettino Unione Matematica Italiana

Letterio Toscano

Relazione tra alcune serie di potenze e trigonometriche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2, Vol. **1** (1939), n.2, p. 141–144.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_2_141_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1939.

Relazione tra alcune serie di potenze e trigonometriche.

Nota di LETTERIO TOSCANO (a Messina).

Sunto. - *L'Autore, confrontando gli integrali delle successioni ricorrenti Lucasiane, assegnati con funzioni simmetriche delle radici della loro equazione caratteristica, o in forma trigonometrica, da alcune serie di potenze ne ricava altre trigonometriche, e viceversa.*

1. Siano

$$U_0, \quad U_1, \quad U_2, \ldots \quad (U)$$
$$V_0, \quad V_1, \quad V_2, \ldots \quad (V)$$

con $U_0 = 0$, $U_1 = 1$, $V_0 = 2$, $V_1 = p$, le due successioni ricorrenti

Lucasiane di equazione caratteristica, a radici distinte,

$$z^2 - pz + q = 0 .$$

L'espressione dei termini generali U_n e V_n, l'integrale cioè delle successioni ricorrenti Lucasiane, come è noto, può essere dato con funzioni simmetriche delle radici x e y della loro equazione caratteristica, o in forma trigonometrica.

Precisamente si ha [1]

$$U_n = \frac{x^n - y^n}{x - y}, \quad V_n = x^n + y^n$$

e

$$U_n = q^{\frac{n-1}{2}} \frac{\operatorname{sen} n\omega}{\operatorname{sen} \omega}, \quad V_n = 2q^{\frac{n}{2}} \cos n\omega$$

con $\cos \omega = \dfrac{p}{2q^{\frac{1}{2}}}$.

Per confronto, e osservando che $\operatorname{sen} \omega = \dfrac{x - y}{2i\sqrt{xy}}$, segue

$$(\alpha) \qquad \begin{aligned} x^n + y^n &= 2(xy)^{\frac{n}{2}} \cos n\omega \\ x^n - y^n &= 2i(xy)^{\frac{n}{2}} \operatorname{sen} n\omega ; \end{aligned}$$

e con queste relazioni è allora possibile da una serie di potenze ricavarne una trigonometrica, e viceversa.

2. Così dalle serie geometriche

$$\frac{x}{1 - x} = x + x^2 + x^3 + \ldots \qquad |x| < 1$$

$$\frac{y}{1 - y} = y + y^2 + y^3 + \ldots \qquad |y| < 1,$$

sommando e sottraendo si ha

$$\frac{x + y - 2xy}{1 - (x + y) + xy} = (x + y) + (x^2 + y^2) + (x^3 + y^3) + \ldots$$

$$\frac{1}{1 - (x + y) + xy} = \frac{x - y}{x - y} + \frac{x^2 - y^2}{x - y} + \frac{x^3 - y^3}{x - y} + \ldots,$$

[1] L. Toscano, *Sulla integrazione delle successioni ricorrenti del secondo ordine, lineari ed omogenee*, « Rend. R. Acc. Naz. Lincei », voll. XIX e XX (1934).

e da queste, per le (α) e con $\lambda = \sqrt{xy}$, seguono le serie trigonometriche (²)

$$\frac{1 - \lambda \cos \omega}{1 - 2\lambda \cos \omega + \lambda^2} = 1 + \lambda \cos \omega + \lambda^2 \cos 2\omega + \ldots$$

$$\frac{1}{1 - 2\lambda \cos \omega + \lambda^2} = 1 + \frac{\lambda \operatorname{sen} 2\omega}{\operatorname{sen} \omega} + \frac{\lambda^2 \operatorname{sen} 3\omega}{\operatorname{sen} \omega} + \ldots .$$

Dalla serie logaritmica

$$\log (1 - x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots \qquad |x| < 1$$

e analoga per $\log(1 - y)$ con $|y| < 1$, sommando e applicando la prima delle (α) si ha

$$\frac{1}{2} \log (1 - 2\lambda \cos \omega + \lambda^2) = -\lambda \cos \omega - \frac{\lambda^2}{2} \cos 2\omega - \frac{\lambda^3}{3} \cos 3\omega - \ldots .$$

Dallo sviluppo in serie di arcotangente

$$\operatorname{arcotg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots \qquad |x| < 1$$

e analogo per $\operatorname{arcotg} y$ con $|y| < 1$, sommando e applicando la prima delle (α) si ha

$$\frac{1}{2} \operatorname{arcotg} \frac{2\lambda \cos \omega}{1 - \lambda^2} = \lambda \cos \omega - \frac{\lambda^3}{3} \cos 3\omega + \frac{\lambda^5}{5} \cos 5\omega - \ldots .$$

Dalla serie esponenziale si ha

$$e^x + e^y = 2 + \frac{x + y}{1!} + \frac{x^2 + y^2}{2!} + \ldots ,$$

e poichè

$$x = \lambda (\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega)$$
$$y = \lambda (\cos \omega - i \operatorname{sen} \omega)$$

si deduce

$$e^x + e^y = 2e^{\lambda \cos \omega} \cos (\lambda \operatorname{sen} \omega),$$

e in definitiva si ha

$$e^{\lambda \cos \omega} \cos (\lambda \operatorname{sen} \omega) = 1 + \lambda \cos \omega + \frac{\lambda^2}{2!} \cos 2\omega + \ldots .$$

Analogamente si ricava l'altro sviluppo

$$e^{\lambda \cos \omega} \operatorname{sen} (\lambda \operatorname{sen} \omega) = \frac{\lambda}{1!} \operatorname{sen} \omega + \frac{\lambda^2}{2!} \operatorname{sen} 2\omega + \frac{\lambda^3}{3!} \operatorname{sen} 3\omega + \ldots ,$$

(²) Queste serie e le successive sono note o quasi. Ma ciò non ha importanza ai fini del lavoro, perchè qui si desidera solo illustrare il metodo fissato.

3. Inversamente dagli sviluppi ([3])

$$\cos(z \operatorname{sen} \omega) = J_0(z) + 2J_2(z)\cos 2\omega + 2J_4(z)\cos 4\omega + \dots$$
$$\operatorname{sen}(z \operatorname{sen} \omega) = 2J_1(z)\operatorname{sen} \omega + 2J_3(z)\operatorname{sen} 3\omega + 2J_5(z)\operatorname{sen} 5\omega + \dots,$$

con $J_n(z)$ funzione di Bessel di prima specie definita da

$$J_n(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2r}}{r!\,(n+r)!},$$

posto

$$J_n(2i\sqrt{xy}) = \frac{i^n (xy)^{\frac{n}{2}}}{n!}\,\Omega_n(x, y),$$

si hanno, per le (α), gli altri sviluppi

$$\cos(x - y) = \Omega_0 - \frac{x^2 + y^2}{2!}\Omega_2 + \frac{x^4 + y^4}{4!}\Omega_4 - \dots$$
$$\operatorname{sen}(x - y) = \frac{x - y}{1!}\Omega_1 - \frac{x^3 - y^3}{3!}\Omega_3 + \frac{x^5 - y^5}{5!}\Omega_5 - \dots,$$

la cui dimostrazione è stata richiesta in questo Bollettino (Febbraio 1933, p. 47).

([3]) WHITTAKER e WATSON, *Modern Analysis*, Cambridge, 1935, p. 379.