
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

TULLIO VIOLA

Deformazione di prismi rettangolari cavi, a pareti sottili, soggetti a torsione

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2, Vol. 1
(1939), n.2, p. 135–141.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_2_135_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Deformazione di prismi rettangolari cavi, a pareti sottili, soggetti a torsione ⁽¹⁾.

Nota di T. VIOLA (a Roma).

Sunto. - *Un prisma rettangolare cavo a parete sottile è sollecitato, a un'estremità, da un momento torcente. All'altra estremità esso è vincolato da cerniere. Il prisma può assumere infiniti stati di deformazione, cui corrisponde però un unico stato di tensione. La deformazione resta univocamente determinata dall'aggiunta di un certo vincolo (per es. un incastro completo dell'estremità incernierata, oppure una serie di diaframmi perpendicolari all'asse del prisma), il quale per altro non subisce alcuna sollecitazione. La dimostrazione di questa proprietà è data mediante lo studio analitico del minimo di un certo funzionale che esprime l'energia potenziale totale del prisma.*

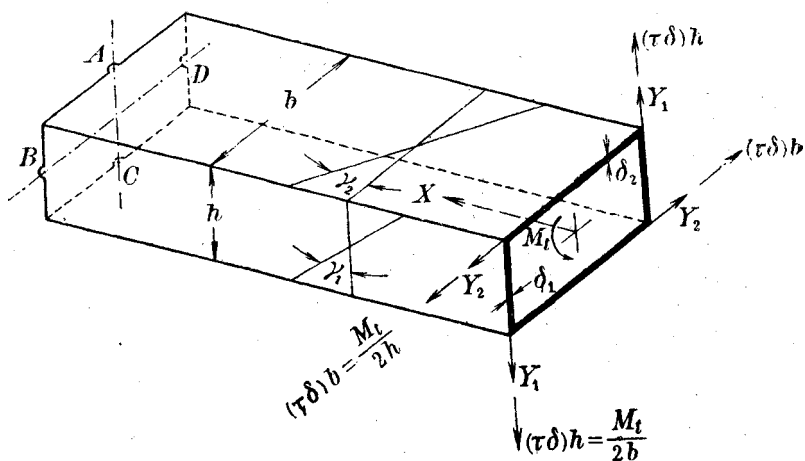
Riassumo una ricerca fatta in collaborazione col prof. C. MINELLI nello studio di un problema tecnico che ha applicazione soprattutto nella costruzione di aerei ⁽²⁾.

La questione meccanica mi sembra di particolare interesse, anche perchè la sua soluzione offre un esempio notevole di un sistema non iperstatico, ma vincolato in modo che il suo equilibrio elastico è il medesimo con o senza un certo vincolo: l'equilibrio è indifferente senza il vincolo, è invece stabile col vincolo.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo in Roma.

(2) In corso di stampa in «L'Aerotecnica», sotto il titolo: *Sulla torsione dei prismi cavi rettangolari a parete sottile*. Chi volesse approfondire la questione meccanica, può consultare, oltre alla prima parte del citato articolo dell'«Aerotecnica», della quale è autore il prof. C. MINELLI, un altro articolo dello stesso prof. C. MINELLI, pubblicato in «Ricerche d'ingegneria», novembre-dicembre, 1937, sotto il titolo: *Nuovo calcolo energetico-variazionale di travi a cassone sottoposte a torsione*.

1. Consideriamo il parallelepipedo cavo qui rappresentato in figura (« trave a cassone ») costituito di quattro pareti, ciascuna di spessore δ costante ed uguale allo spessore della parete opposta: tale spessore è supposto sufficientemente piccolo, perchè si possa prescindere, nei calcoli, dalla rigidezza torsionale individuale delle quattro pareti. Le unioni delle pareti, due a due lungo gli spigoli, sono supposte a cerniere continue e prive d'attrito. L'esistenza di tali cerniere non impedisce la variazione dell'angolo, nei quattro vertici di una generica sezione della trave a cassone:



cioè ogni sezione è libera di divenire un parallelogramma, però senza che i suoi lati s'incurvino. Una delle due estremità della trave (quella destra in figura) si suppone libera e sottoposta a torsione, mediante applicazione di tensioni di scorrimento tali che sia ivi $\tau\delta = \text{costante}$ ($\delta = \delta_1, \delta_2$). L'altra estremità si suppone vincolata mediante quattro cerniere cilindriche ($ABCD$ in figura), ciascuna avente l'asse normale alla parete cui appartiene.

Indichiamo con x la distanza di una generica sezione dall'estremità libera; con $y_1(x), y_2(x)$ le deformazioni di scorrimento rispettivamente delle pareti verticali e delle pareti orizzontali ⁽³⁾; con γ_1, γ_2 (indipendenti da x) gli angoli di cui ruota, per effetto dello scorrimento, una sezione rispettivamente di parete verticale e di parete orizzontale ⁽³⁾; con M_t il momento torcente all'estremità libera della trave.

La continuità lungo lo spigolo comune a due pareti adiacenti

⁽³⁾ I sensi positivi di queste deformazioni si assumono come indica la figura.

impone la relazione lineare

$$h\gamma_1 + b\gamma_2 = 0,$$

mentre le tensioni di scorrimento τ_1 , τ_2 dovranno essere legate alle corrispondenti deformazioni di scorrimento y_1 , y_2 dalle formole:

$$\tau_1 = -G(\gamma_1 + y_1'), \quad \tau_2 = -G(\gamma_2 + y_2'),$$

essendo G il modulo d'elasticità tangenziale.

Si dimostra facilmente, e in più modi, che il sistema elastico descritto è in equilibrio indifferente, se sottoposto alla sollecitazione esterna indicata, perchè, per il sistema stesso, è possibile trovare infinite configurazioni deformate compatibili geometricamente, alle quali corrisponde però un unico stato di tensione che sta in equilibrio con le forze esterne applicate. Ma supponiamo che venga sopraggiunto al sistema un nuovo vincolo, come per es. l'uno o l'altro dei seguenti:

a) Una serie di diaframmi fra loro equidistanti, perpendicolari alla direzione x . La serie è supposta tanto fitta da impedire le deformazioni del contorno di ciascuna sezione (non ostacolando invece le deformazioni normalmente al piano di ciascuna sezione). Viene così imposta la nuova condizione:

$$\frac{y_1}{b} = \frac{y_2}{h}.$$

b) Incastro completo dell'estremità già incernierata, in modo da impedire l'ingobbamento della corrispondente sezione. Questo ulteriore vincolo impedisce la rotazione delle sezioni, dovuta allo scorrimento, per cui dev'essere

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0.$$

Il sistema diviene allora staticamente determinato.

In entrambi i casi si trova lo stesso stato di tensione, cioè:

$$(1) \quad \tau_1 = \frac{M_t}{2bh\delta_1}, \quad \tau_2 = \frac{M_t}{2bh\delta_2} \quad (4).$$

Inoltre si verifica facilmente che, nel caso a) i diaframmi non sono sollecitati, e nel caso b) l'incastro assiale non è sollecitato (5).

(4) E quindi, come dev'essere, all'estremità libera,

$$\tau_1\delta_1 = \tau_2\delta_2 = \frac{M_t}{2bh}.$$

(5) Infatti si dimostra che, nel caso b), le tensioni normali sono nulle ovunque, in particolare sono nulle nella sezione all'estremità vincolata.

Lo stesso risultato si otterrebbe se, invece del vincolo supplementare *a*) oppure *b*), se ne supponesse un altro, rappresentato analiticamente da una qualunque relazione lineare fra y_1 , y_2 , γ_1 . Lo stato di tensione sarebbe ancora e sempre il medesimo, rappresentato dalle formole (1), pur variando, da caso a caso, lo stato di deformazione. E in nessun caso il vincolo sarebbe sollecitato.

La spiegazione del fenomeno apparentemente paradossale, può essere dato ricorrendo a considerazioni di carattere energetico. Indicati con L il lavoro di deformazione (o « energia potenziale elastica »), con U la somma dei prodotti scalari delle forze esterne per gli spostamenti dei loro punti d'applicazione; il teorema dei lavori virtuali afferma che, per l'equilibrio elastico del sistema, la differenza $L - U$ dev'essere minima. Ora si trova facilmente

$$(2) \quad L - U = \int_0^l \alpha (y_1' + \gamma_1)^2 + \beta \left(y_2' - \frac{h}{b} \gamma_1 \right)^2 + M_c \left(\frac{y_1'}{b} + \frac{y_2'}{h} \right) dx.$$

con $\alpha = Gh\delta_1$, $\beta = Gb\delta_2$ costanti, onde il problema della determinazione dello stato di deformazione del sistema, sotto qualsiasi ipotesi di vincolo, si riduce ad un semplice problema variazionale, cioè alla determinazione del minimo del funzionale (2). Ricordiamo che le condizioni ai limiti sono:

$$y_1(l) = y_2(l) = 0.$$

2. Indicata con $F = F(y_1', y_2')$ la funzione integranda in (2), annullando la variazione prima del funzionale, si è condotti a un sistema di due equazioni di EULERO le quali, poichè F dipende dalle sole derivate y_1' , y_2' , assumono, com'è noto, la forma particolarmente semplice:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 F}{\partial y_1'^2} y_1'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y_1' \partial y_2'} y_2'' = 0, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y_1' \partial y_2'} y_1'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y_2'^2} y_2'' = 0. \end{cases}$$

Ora, poichè il determinante di questo sistema è

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_1'^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y_2'^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_1' \partial y_2'} \right)^2 = 4\alpha\beta,$$

cioè $\neq 0$, si deduce intanto che le funzioni $y_1(x)$, $y_2(x)$ che minimizzano (2) sono necessariamente lineari. Poniamo:

$$y_1 = \alpha_1(x - l), \quad y_2 = \alpha_2(x - l).$$

Sostituendo in (2), il funzionale assume l'espressione

$$I = I(a_1, a_2, \gamma_1) = \left[\alpha(a_1 + \gamma_1)^2 + \beta \left(a_2 - \frac{h}{b} \gamma_1 \right)^2 + M_t \left(\frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{h} \right) \right] l,$$

cioè si riduce a una semplice funzione di secondo grado delle tre variabili a_1 , a_2 , γ_1 , da rendere minima con le ordinarie regole del Calcolo. Se si annullano le tre derivate prime di I , si ottiene il seguente sistema di tre equazioni lineari nelle tre incognite a_1 , a_2 , γ_1 , il quale però è indeterminato e precisamente è di caratteristica 2:

$$(3) \quad \begin{cases} 2\alpha a_1 & & + 2x\gamma_1 & = -\frac{M_t}{b} \\ & 2\beta a_2 & - 2\beta \frac{h}{b} \gamma_1 & = -\frac{M_t}{h} \\ 2\alpha a_1 - 2\beta \frac{h}{b} a_2 + 2 \left(x + \beta \frac{h^2}{b^2} \right) \gamma_1 & = 0. \end{cases}$$

Se a_1 , a_2 , γ_1 sono tre valori che soddisfano a questo sistema, se u , v , w sono tre corrispondenti incrementi, si trova identicamente

$$(4) \quad \begin{aligned} & I(a_1 + u, a_2 + v, \gamma_1 + w) - I(a_1, a_2, \gamma_1) = \\ & = \left[\alpha u^2 + \beta v^2 + \left(x + \beta \frac{h^2}{b^2} \right) w^2 + 2xuw - 2\beta \frac{h}{b} vw \right] l. \end{aligned}$$

Il secondo membro di questa espressione è una forma quadratica nelle tre variabili u , v , w . Il suo discriminante è

$$\Delta_3 = l^3 \begin{vmatrix} \alpha & 0 & x \\ 0 & \beta & -\beta \frac{h}{b} \\ x & -\beta \frac{h}{b} & x + \beta \frac{h^2}{b^2} \end{vmatrix},$$

i cui minori principali sono

$$\Delta_1 = \alpha l, \quad \Delta_2 = \alpha \beta l^2.$$

Essendo $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 = 0$, si riconosce che la forma è *semi-definita positiva*, il che significa che I ha, in corrispondenza di ogni terna (a_1, a_2, γ_1) che risolve il sistema (3), un minimo.

Mostriamo ora che tale minimo è *improprio* e precisamente la differenza

$$I(a_1 + u, a_2 + v, \gamma_1 + w) - I(a_1, a_2, \gamma_1)$$

si annulla in corrispondenza di ogni terna (u, v, w) tale che $a_1 + u$,

$a_2 + v$, $\gamma_1 + w$ siano tre radici del sistema, mentre essa si mantiene positiva per ogni altra terna.

La funzione $I(a_1, a_2, \gamma_1)$ è invece priva di massimo.

Gioverà studiare il comportamento della forma a secondo membro della (4), per via geometrica. Interpretando a_1, a_2, γ_1 come una terna di coordinate cartesiane ortogonali, le (3) rappresentano tre piani formanti fascio, cioè passanti per una stessa retta r . Interpretando inoltre u, v, w come tre nuove coordinate cartesiane ortogonali, riferite a tre assi rispettivamente paralleli agli assi a_1, a_2, γ_1 , ed uscenti da un generico punto O' di r , l'equazione che si ottiene uguagliando a zero il secondo membro della (4), cioè

$$(5) \quad zu^2 + \beta v^2 + \left(x + \beta \frac{h^2}{b^2}\right)w^2 + 2xuv - 2\beta \frac{h}{b}vw = 0,$$

rappresenta manifestamente un cono spezzato in due piani, potendosi scrivere

$$\alpha(u + w)^2 + \beta \left(v - \frac{h}{b}w\right)^2 = 0;$$

e i due piani complessi coniugati che lo compongono hanno come soli punti reali quelli della loro retta d'intersezione r .

Ciò vale a dimostrare l'enunciato.

3. Se alle equazioni (3) se ne aggiunge una quarta (L), lineare in a_1, a_2, γ_1 che sia indipendente da quelle, viene individuato un ben determinato punto di minimo sulla retta r : esso è l'intersezione della r col piano rappresentato dalla (L).

Imponendo *a priori* l'equazione (L), ci si riduce a un problema di minimo vincolato. In tal caso il minimo è un minimo proprio. Per es. se l'equazione (L) è

$$\gamma_1 = 0,$$

il sistema fornisce i valori (oltre a γ_1):

$$a_1 = -\frac{M_1}{2Gbh\delta_1}, \quad a_2 = -\frac{M_2}{2Gbh\delta_2},$$

e quindi le espressioni:

$$y_1 = \frac{M_1(l-x)}{2Gbh\delta_1}, \quad y_2 = \frac{M_2(l-x)}{2Gbh\delta_2}$$

(n. 1, caso b). Questa terna di valori a_1, a_2, γ_1 è rappresentata dal punto P d'intersezione della retta r col piano $\gamma_1 = 0$. Se allora, nell'integrale $I(a_1, a_2, \gamma_1)$ si tiene ferma la detta condizione $\gamma_1 = 0$, vuol dire che, al variare di a_1, a_2 , non si esce appunto dal piano $\gamma_1 = 0$. Ma in tale piano vi è il solo punto P sulla retta r : dunque $I(a_1, a_2, \gamma_1)$ ha effettivamente un minimo proprio in P .

Parimenti, se l'equazione (L) è (n. 1, caso a)

$$ha_1 - ba_2 = 0,$$

il sistema fornisce i valori:

$$a_1 = -\frac{M_t}{4Gb^2h} \left(\frac{h}{\delta_1} + \frac{b}{\delta_2} \right) \frac{1}{h}, \quad a_2 = -\frac{M_t}{4Gb^2h} \left(\frac{h}{\delta_1} + \frac{b}{\delta_2} \right) \frac{1}{b},$$

$$\gamma_1 = -\frac{M_t}{4Gb^2h} \left(\frac{h}{\delta_1} - \frac{b}{\delta_2} \right) \frac{1}{h},$$

e quindi le espressioni:

$$y_1 = \frac{M_t(l-x)}{4Gb^2h} \left(\frac{h}{\delta_1} + \frac{b}{\delta_2} \right) \frac{1}{h}, \quad y_2 = \frac{M_t(l-x)}{4Gb^2h} \left(\frac{h}{\delta_1} + \frac{b}{\delta_2} \right) \frac{1}{b}.$$

Questi valori a_1 , a_2 , γ_1 sono le coordinate dell'intersezione Q della retta r con un certo piano π passante per l'asse γ_1 . Se allora, nell'integrale $I(a_1, a_2, \gamma_1)$ si tiene ferma la condizione

$$ha_1 - ba_2 = 0,$$

vuol dire che, al variare di a_1 , a_2 , γ_1 , non si esce dal piano π . E, ragionando in modo identico, si vede anche qui che $I(a_1, a_2, \gamma_1)$ ha un minimo proprio in Q (⁶).

Tornando all'interpretazione meccanica, possiamo dire, per concludere, che ciascuna delle configurazioni definite da terne a_1 , a_2 , γ_1 che soddisfano al sistema (3) è, per sè stessa e a prescindere dal vincolo che la determina, di equilibrio indifferente. L'equilibrio diviene stabile solo mediante l'aggiunta del vincolo. Il vincolo è necessario per l'indeformabilità del sistema, ma non è sollecitato.

(⁶) Le soluzioni trovate coincidono con quelle che dà nei due casi la teoria di BREDT.