Bollettino Unione Matematica Italiana

Giuseppe Pompilj

Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane posseggono una g_3^1

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2, Vol. **1** (1939), n.2, p. 132–135.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_2_132_0>

Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane posseggono una g_3^1.

Nota di GIUSEPPE POMPILJ (a Roma).

Sunto. - *Si dimostra che una superficie algebrica, col* $p_g > 1$, *le cui sezioni piane hanno una* g_3^1, *possiede un fascio razionale di cubiche piane, cioè ha il* $p^{(1)} = 1$.

Nei problemi che si riconnettono alla classificazione delle superficie algebriche si presenta, come non privo d'interesse, quello di classificare le superficie le cui sezioni piane posseggono una certa g_n^1 come serie lineare d'ordine minimo. Così se le sezioni piane posseggono una g_1^1, nel qual caso sono razionali, in seguito ai lavori di NOETHER (1870) (1) e di PICARD (1887) (2) possiamo dire che la superficie è razionale e, ad eccezione della superficie romana di STEINER, rigata. Ed ancora è noto che le superficie le cui sezioni piane posseggono una g_2^1, studiate da G. CASTELNUOVO (1890-1894) (3) e da F. ENRIQUES (1893) (4), sono razionali o rigate. Delle superficie le cui sezioni piane hanno una g_3^1 si è recentemente occupato J. BRONOWSKI (1934) (5) il quale ha classificato quelle che posseggono un fascio razionale di cubiche. Accanto a questo tipo di superficie ne esiste ovviamente un'altro offerto dalle superficie rigate; sorge così il problema di determinare se con questi due tipi si esauriscono tutte le superficie algebriche le cui sezioni piane posseggono una sola g_3^1.

Scopo della presente Nota è di portare un piccolo contributo a questo problema dimostrando che: *una superficie algebrica col* $p_g > 1$, *le cui sezioni piane hanno una* g_3^1, *possiede un fascio razionale di cubiche piane, cioè ha il* $p^{(1)} = 1$.

Sia F_n una superficie algebrica, d'ordine n dello S_3, le cui sezioni piane, di genere π, posseggono una g_3^1 e supponiamo ancora che per essa si abbia $p_g > 1$; tale è, per esempio, una superficie d'ordine n con una retta $(n-3)$-pla. L'ipotesi $p_g > 1$ ci dà intanto che deve essere $\pi > 4$; sia infatti $\pi = 4$, l'esistenza delle curve canoniche implica che sia $n \leq 2\pi - 2$ (6) cioè. nel caso nostro. $n \leq 6$, ma, siccome le curve del quarto ordine hanno al più genere tre, deve pure essere $n > 4$, cioè o è $n = 5$ ovvero è $n = 6$, ma in tutti e due i casi il p_g al più è eguale ad uno; analogamente si prova che l'ipotesi $p_g > 1$ non è compatibile con l'altra $\pi < 4$.

Ma se è $\pi > 4$ la g_3^1 delle sezioni piane della F_n è *speciale* ed *unica*, speciale perchè $3 - \pi < 1$, unica perchè una curva con due g_3^1 si può trasformare in una curva d'ordine m con due punti $(m-3)$-pli, dove evidentemente $2(m-3) \leq m$, e cioè o in una cubica o in una quartica o in una quintica con due punti doppi o in una sestica con due punti tripli, curve al più di genere quattro.

(1) Ved. « Mathem. Annalen », t. III, 1870.

(2) Ved. « Journal für die Math. », t. C, 1887.

(3) Ved. « Rend. Circolo Mat. di Palermo », 1890 e « Rend. Reale Acc. dei Lincei », 1894.

(4) Ved. « Rend. Reale Acc. dei Lincei », 1893.

(5) Ved. « Proc. of Cambridge Phil. Soc. », 1934.

(6) Ved. p. es. F. ENRIQUES-L. CAMPEDELLI, *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche*. (Cedam, Padova, 1930-VIII), pag. 88.

Sia C una sezione piana della F_n; su essa, oltre la g_3^1, consideriamo le seguenti tre serie lineari:

a) la serie canonica: $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$;

b) la serie caratteristica segata dalle altre sezioni piane: g_n;

c) la serie segata dal sistema canonico: $g_{2\pi-2-n}$.

Queste tre serie, i cui gruppi indicheremo rispettivamente con $G_{2\pi-2}$, G_n, $G_{2\pi-2-n}$, soddisfano alla nota relazione:

$$|g_{2\pi-2-n} + g_n| = g_{2\pi-2}^{\pi-1}.$$

Fissata una terna $P_1P_2P_3$ della g_3^1 di C, vogliamo dimostrare che ogni gruppo della $g_{2\pi-2-n}$ che passa per P_1 contiene anche gli altri due punti P_2 e P_3; infatti sia $\overline{G}_{2\pi-2-n}$ un gruppo della nostra serie che contenga P_1 e $\overline{G}_n$ un gruppo della serie caratteristica che passa per P_2 e non per P_3 (il che è possibile); in tal caso $\overline{G}_{2\pi-2-n} + \overline{G}_n$ è un gruppo della serie canonica il quale passa per due punti P_1P_2 di un gruppo della g_3^1 e quindi contiene anche il terzo punto P_3, ma questo non appartiene a $\overline{G}_n$ quindi deve necessariamente far parte di $\overline{G}_{2\pi-2-n}$; ripetendo lo stesso ragionamento prendendo un $\overset{*}{G}_n$ passante per P_3 e non per P_2 si ha, come appunto si voleva dimostrare, che il $\overline{G}_{2\pi-2-n}$ contiene anche i punti P_2 e P_3.

Questo risultato ci dice che tutte le curve canoniche di F_n passanti per un punto P della superficie passano per i punti coniugati ad esso nelle g_3^1 delle sezioni piane che lo contengono, da cui segue che:

a) questi coniugati di P non possono invadere tutta la superficie ma debbono riempire una curva Γ d'ordine m la quale ha in P un punto $(m-2)$-plo;

b) tutte le curve canoniche di F_n che passano per P hanno in comune la curva Γ.

Ma allora, per il teorema di E. Bertini esteso alle superficie da F. Enriques, il sistema canonico è composto con le curve di un fascio (Γ^*), il che appunto porta che sia $p^{(1)} = 1$ [7] e che le Γ^* siano curve ellittiche; scrivo Γ^* e non Γ perchè, *a priori*, potrebbe darsi che le Γ siano a loro volta formate con le curve di un altro fascio (Γ^*).

Riguardo alla Γ osserviamo che non può essere $m - 2 > 1$ perchè, ripetendo lo stesso ragionamento precedente per un suo altro punto qualsiasi, si trova che anche esso deve essere di mol-

[7] Ved. p. es. F. Enriques-L. Campedelli, *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche.* (Cedam. Padova), pag. 340.

teplicità $m-2$. Gli unici casi possibili sono quindi $m=2$ ed $m=3$. D'altra parte siccome le Γ^* sono ellittiche e la Γ o è una Γ^* o è formata da curve Γ^* non resta altro che essa sia una cubica piana ellittica; e quindi Γ coincide con una Γ^*.

Abbiamo pertanto dimostrato che la F_n possiede un fascio di cubiche piane ellittiche le quali segano su ogni sezione piana gruppi della g_3^1: fascio evidentemente *razionale* come le g_3^1 segate dalle sue curve.