Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Giacomo Candido

Soluzioni intere delle equazione indeterminata $\sqrt[n]{x+\sqrt{y}}+\sqrt[n]{x-\sqrt{y}}=z$

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2, Vol. **1** (1939), n.2, p. 128–132.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_2_128_0>

Soluzioni intere della equazione indeterminata

$$[1] \qquad \sqrt[n]{x+\sqrt{y}}+\sqrt[n]{x-\sqrt{y}}=z.$$

Nota di GIACOMO CANDIDO (a Galatina).

Sunto. - *L'A. estende in questa Nota i risultati recentemente ottenuti per il caso* n $=3$ [1].

1. Richiamiamo rapidamente alcune formole relative alle funzioni numeriche del 2° ordine:

Data la quadratica

$$x^2-px+q=0,$$

e dette x_1 ed x_2 le sue radici, si ha la identità

$$[1] \qquad \sqrt[n]{\frac{1}{2}(x_1{}^n+x_2{}^n)+\frac{1}{2}\frac{x_1{}^n-x_2{}^n}{x_1-x_2}\sqrt{\Delta}}+$$
$$+\sqrt[n]{\frac{1}{2}(x_1{}^n+x_2{}^n)-\frac{1}{2}\frac{x_1{}^n-x_2{}^n}{x_1-x_2}\sqrt{\Delta}}=p,\ldots \quad (\Delta=p^2-4q)$$

(1) P. CATTANEO, « Boll. di Mat. », anno 34°, pag. 123.

e trascrivendo questa colle notazioni di LUCAS ([2]):

$$V_n(p, q) = x_1^n + x_2^n, \quad U_n(p, q) = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2},$$

che sono legate dalle relazioni

$$V_n^2(p, q) - \Delta U_n^2(p, q) = 4q, \quad \frac{dV_n(p, q)}{dp} = V_n'(p, q) = nU_n(p, q),$$

deduciamo le tre forme equivalenti sotto cui si può mettere la [I]:

$$\text{[II]} \quad \sqrt[n]{\frac{1}{2} V_n(p, q) + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} U_n(p, q)} + \sqrt[n]{\frac{1}{2} V_n(p, q) - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} U_n(p, q)} = p.$$

$$\text{[III]} \quad \sqrt[n]{\frac{1}{2} V_n(p, q) + \frac{1}{2}\sqrt{V_n^2 - 4q^n}} + \sqrt[n]{\frac{1}{2} V_n(p, q) - \frac{1}{2}\sqrt{V_n^2(p, q) - 4q^n}} = p,$$

$$\text{[IV]} \quad \sqrt[n]{\frac{1}{2} V_n(p, q) + \frac{1}{2n}\sqrt{\Delta}\, V_n'(p, q)} + \sqrt[n]{\frac{1}{2} V_n(p, q) - \frac{1}{2n}\sqrt{\Delta}\, V_n'(p, q)} = p.$$

2. Evidentemente queste formole forniscono infinite soluzioni reali od imaginarie della [1] secondo che $p^2 - 4q \geq 0$, o $p^2 - 4q < 0$.

Esaminiamo ora i casi in cui le soluzioni reali sono anche intere:

Riprendiamo la [II] e vediamo quando gli elementi che trovansi sotto i radicali d'indice n sono divisibili per 2.

Intanto si ha che qualunque siano gl'interi n e $-q$ (oppure q, se s'impone la condizione $\Delta = p^2 - 4q \geq 0$), per $p = 2r$ è

$$\text{[V]} \quad \sqrt[n]{\overline{V}_n(2r, -q) + U_n(2r, -q)\sqrt{r^2 + q}} + \\ + \sqrt[n]{\overline{V}_n(2r, -q) - U_n(2r, -q)\sqrt{r^2 + q}} = 2r, \ldots$$

e questo per il fatto che si ha sempre

$$V_n(2r, -q) = 2\overline{V}_n(2r, -q),$$

con $\overline{V}_n(2r, -q)$ intero. E così dalla [V] si deduce che

La [1], *qualunque sia l'indice* n, *è sempre suscettibile di infinite soluzioni intere* se p *è un numero pari.*

Per $n = 3$ si ha

$$V_3(2p, -q) = (2r)^3 + 3(2r)q, \quad U_3(2r, -q) = (2r)^2 + q, \quad \Delta = 4(p^2 + q)$$

([2]) E. LUCAS, *Théor. des nombres*, tom. I, pag. 308.

epperò [3]

$$\sqrt[3]{r(4r^2+3q)+(4r^2+q)\sqrt{r^2+q}}+$$
$$+\sqrt[3]{r(4r^2+3q)-(4r^2+q)\sqrt{r^2+q}}=2r.$$

Per $n=4$

$$V_4(2r,-q)=(2r)^4+4(2r)^2q+2q^2,\quad U_4(2r,-q)=(2r)^3+2(2r)q$$

epperò

$$\sqrt[4]{8r^4+8r^2q+q^2+4r(2r^2+q)\sqrt{r^2+q}}+$$
$$+\sqrt[4]{8r^4+8r^2+q^2-4r(2r^2+q)\sqrt{r^2+q}}=2r.$$

Esaminiamo ora il caso $p=2r+1$.

Dobbiamo stabilire quando le due funzioni

$$V_n(2r+1,-q),\quad U_n(2r+1,-q),$$

sono contemporaneamente divisibili per 2.

A tal'uopo consideriamo gli sviluppi

$$V_n(2r+1,-q)=(2r+1)^n+C_1(2r+1)^{n-2}q+\ldots+C_nq^{\frac{n}{2}}\quad (\text{n } pari)$$
$$V_n(2r+1,-q)=(2r+1)^n+C_1(2r+1)^{n-2}q+\ldots+C_n(2r+1)q^{\frac{n-1}{2}}$$
(n *dispari*).

Questi sviluppi dimostrano che se $-q$ è *zero* o *pari*, la $V_n(2r+1,-q)$ non può essere divisibile per 2, ed in questo caso la [1] *non ha soluzioni intere.*

Se q è dispari si ha in ogni caso (cioè, n pari o dispari)

$$V_n[2r+1,-(2s+1)]=(2r+1)^n+C_1(2M_1+1)+\ldots+C_n(2M_n+1)$$

ossia

$$V_n[(2r+1),-(2s+1)]=(2r+1)^n+2M+C_1+C_2+\ldots+C_n,$$

ma [4]

$$V_n(1,1)=1+C_1+\ldots+C_n,$$

epperò

$$V_n[2r+1,-(2s+1)]=(2r+1)^n-1+V_n(1,1)+2M,$$

da cui risulta che la $V_n[2r+1,-(2s+1)]$ è divisibile per 2 se lo è la $V_n(1,1)$, ciò che si verifica solo quando $n=3k$, giacchè solo in tal caso si ha [5] $V_{3k}(1,1)=(-1)^k2$, mentre $V_{3k+1}(1,1)=(-1)^k$ e $V_{3k+2}(1,1)=(-1)^{k+1}$.

(3) V. CATTANEO, loc. cit., pag. 124.

(4) V. LUCAS, loc. cit.. pag. 312.

(5) Vedi nota (4).

Alle stesse conclusioni si perviene per la $U_n[2r+1, -(2s+1)]$, per il fatto che è (6) $U_{3k}(1, 1)=0$, mentre $U_{3k+1}(1, 1)=(-1)^k$, $U_{3k+2}(1, 1)=(-1)^k$.

In definitiva si ha la proposizione:

La [1], *per* p = 2r + 1, *è suscettibile d'infinite soluzioni intere solo quando l'indice* n *è della forma* 3k.

Per $k=1$ si ha

$$\frac{1}{2} V_3[2r+1, -(2s+1)] = (2r+1)(2r^2+2r+3s+2);$$

$$\frac{1}{2} V_3(2r+1, 2s+1) = (2r+1)(2r^2+2r-3s-1);$$

$$\frac{1}{2} U_3[2r+1, -(2s+1)] = 2r^2+2r+s+1,$$

$$\frac{1}{2} U_3(2r+1, 2s+1) = 2r^2+2r-s,$$

$$\Delta = 4r^2+4r+8s+5, \quad \Delta = 4r^2+4r-8s-3$$

e corrispondentemente si costruiscono le identità:

$$\sqrt[3]{(2r+1)(2r^2+2r+3s+2)+(2r^2+2r+s+1)\sqrt{4r^2+4r+8s+5}} + \sqrt[3]{(2r+1)(2r^2+2r+3s+2)-(2r^2+2r+s+1)\sqrt{4r^2+4r+8s+5}} = 2r+1$$

$$\sqrt[3]{(2r+1)(2r^2+2r-3s-1)+(2r^2+2r-s)\sqrt{4r^2+4r-8s-3}} + \sqrt[3]{(2r+1)(2r^2+2r-3s-1)-(2r^2+2r-s)\sqrt{4r^2+4r-8s-3}} = 2r+1.$$

Per $k=2$, partendo dalla

$$V_6(p, q) = p^6 - 6p^4q + 9p^2q^2 - 2q^3,$$

la [III] porta rapidamente, per $p=2r+1$ e $-q=-(2s+1)$ al risultato:

$$\sqrt[6]{(2r+1)(2r^2+4r+3s+2)^2+(2s+1)^3 + \sqrt{2(2r+1)(2r^2+2r-3s-1)(2r^2+r-s)\sqrt{4r^2+4r-8s+5}}} + \sqrt[6]{(2r+1)(2r^2+4r+3s+2)^2+(2s+1)^3 + \sqrt{(2r+1)(2r^2+2r-3s-1)(2r^2+r-s)\sqrt{4r^2+4r-8s+5}}} = 2r+1.$$

3. Note. — 1ª) Ponendo la equazione di Moivre-Fagnano (7) sotto la forma

[1] $$V_n(x, a) = b, \ldots$$

(6) Vedi nota (4).

(7) Opere di Fagnano - Ediz. della S. I. P. S. Vol. 2° pag. 364.

la (III) dà *istantaneamente* la risoluzione

$$[2] \qquad x = \sqrt[n]{\frac{1}{2}(b + \sqrt{b - 4a^n})} + \sqrt[n]{\frac{1}{2}(b - \sqrt{b - 4a^n}}, \ldots$$

Per la letteratura di questo argomento, vedi gli « Atti del Congresso di Bolzano-Trento S. I. P. S. », anno 1930-IX.

Una curiosità sulla stessa letteratura della [1] è questa: In un lavoro di p. 473, diviso in due volumi, pubblicato a Londra nel 1789, di autore ignoto e col titolo: « *L'Algèbre selon ses vrais principes* » viene data la formula di risoluzione [2] senza alcuna dimostrazione (come aveva fatto MOIVRE) e *si dichiara che essa* [2] *risolve tutte le equazioni di tutti i gradi.* Dopo questa dichiarazione l'A. traduce questa formola di risoluzione in linguaggio ordinario sotto forma di teorema ed aggiunge: « Ce théorème éleméntaire simple et éner« gique est le fondement de la théorie des equations lesquelles out « fait jusqu'ici la matière la plus embronillée de l'analyse. On ne « peut lire ce que les auteurs ont ecrit sur les équations compo« sées, sans être indisposé contre cette multitude de méthodes qui « fatiguent le lecteur sans le contenter ».

2ª) Le formole del § 1 si prestano agevolmente a stabilire le identità che soddisfano alla equazione newtoniana (8)

$$\sqrt[n]{X \pm Y\sqrt{A}} = x \pm y\sqrt{A}.$$

Le identità precennate sono contenute in questa generale

$$\sqrt[n]{V_n(2\lambda, \lambda^2 - A\mu^2) \pm \mu U_n(2\lambda, \lambda^2 - A\mu^2)\sqrt{A}} = \lambda \pm \mu\sqrt{A}.$$

(8) Questa equazione, fissando X ed Y in due N_1 traduce un problema risoluto imperfettamente da NEWTON.