Bollettino Unione Matematica Italiana

Franco De Simoni

Sull'integrazione del moto di un solido intorno ad un punto fisso col metodo di Hamilton-Jacobi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2, Vol. **1** (1939), n.2, p. 122–128.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_2_122_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Sull'integrazione del moto di un solido intorno ad un punto fisso col metodo di Hamilton-Jacobi.

Nota di FRANCO DE SIMONI (a Pisa).

Sunto. - *Il problema del moto di un solido intorno ad un punto fisso, trattato, com' è ben noto, da* LAGRANGE, POISSON, POINSOT, *più tardi dalla* KOWALEWSKI *e da molti altri autori con svariati metodi, viene preso in esame in questa Nota e trattato in modo omogeneo col metodo di* HAMILTON-JACOBI.

1. **Generalità.** — Consideriamo un corpo mobile intorno ad un suo punto fisso O. Scegliamo una terna $O(x, y, z)$ fissa nello spazio ed una $O(\xi, \eta, \zeta)$ solidale col corpo. Introdotti come variabili lagrangiane i tre angoli di EULERO θ, φ, ψ, la forza viva prende la forma:

$$\begin{aligned}2T = {} & A(\psi' \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi + \theta' \cos\varphi)^2 + \\ & + B(\psi' \operatorname{sen}\theta \cos\varphi - \theta' \operatorname{sen}\varphi)^2 + \\ & + C(\psi' \cos\theta + \varphi')^2,\end{aligned}$$

dove A, B, C, sono i momenti principali d'inerzia. Introducendo gli impulsi o momenti cinetici

$$\Theta = \frac{\partial T}{\partial \theta'}, \qquad \Phi = \frac{\partial T}{\partial \varphi'}, \qquad \Psi = \frac{\partial T}{\partial \psi'},$$

avremo, ricavando da queste le θ', φ', ψ', e ponendo:

$$\Lambda = \frac{\Psi - \Phi\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta},$$

$$2T = \frac{(\Theta\cos\varphi + \Lambda\operatorname{sen}\varphi)^2}{A} + \frac{(\Theta\operatorname{sen}\varphi - \Lambda\cos\varphi)^2}{B} + \frac{\Phi^2}{C}.$$

La funzione Hamiltoniana

$$H = T - V,$$

dove V è la funzione potenziale, è:

$$H = \frac{1}{2}\left\{\frac{(\Theta\cos\varphi + \Lambda\operatorname{sen}\varphi)^2}{A} + \frac{(\Theta\operatorname{sen}\varphi - \Lambda\cos\varphi)^2}{B} + \frac{\Phi^2}{C}\right\} - V(\theta, \varphi, \psi) \tag{1}$$

da cui si otterrà il sistema canonico, fatte le posizioni

$$X = \frac{\Theta \cos \varphi + \Lambda \operatorname{sen} \varphi}{A}$$

$$\Xi = \frac{\Theta \operatorname{sen} \varphi - \Lambda \cos \varphi}{B}:$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= X \cos \varphi + \Xi \operatorname{sen} \varphi \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\Phi}{C} - (X \operatorname{sen} \varphi - \Xi \cos \varphi) \operatorname{cotg} \theta \\ \frac{d\psi}{dt} &= X \operatorname{sen} \varphi - \Xi \cos \varphi \\ \frac{d\Theta}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial \theta} - (X \operatorname{sen} \varphi - \Xi \cos \varphi) \frac{\Phi - \Psi \cos \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} \\ \frac{d\Phi}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial \varphi} - X\Xi(B - A) \\ \frac{d\Psi}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial \psi}. \end{aligned} \right.$$

2. **Caso di Lagrange-Poisson.** — Supponiamo che l'ellissoide d'inerzia relativo al punto O sia di rivoluzione intorno all'asse ζ e che su questo sia il baricentro G. Supponiamo che l'unica forza applicata sia il peso (P) del corpo. Assumiamo come asse z la verticale per O diretta verso l'alto.

Allora è $A = B$, $V = Pa \cos \theta$, dove $a = \overline{OG}$. Dal sistema canonico, essendo φ e ψ cicliche, risulta

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0, \quad \frac{d\Psi}{dt} = 0, \quad \text{cioè:} \quad \Phi = Cr = r_0, \quad \Psi = m_0,$$

cioè la $r = \frac{r_0}{C}$ ci dà che la componente assiale della velocità angolare è costante in tutto il moto. Inoltre la

$$\Psi = Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = m_0$$
$$(\gamma_1 = \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, \quad \gamma_2 = \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, \quad \gamma_3 = \cos \theta)$$

traduce l'integrale del momento scalare delle quantità di moto rispetto all'asse fisso z.

Il sistema canonico (2) si riduce allora al rango 2 e si può integrare con sole quadrature. Infatti esso si riduce evidentemente a

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\Theta}{A}, \\ \frac{d\Theta}{dt} &= -Pa \operatorname{sen} \theta - \frac{(Cr_0 - m_0 \cos \theta)^2}{A \operatorname{sen}^3 \theta}, \end{aligned} \right.$$

da cui si ottiene

$$\Theta d\Theta = -\left[APa \operatorname{sen} \theta + \frac{(Cr_0 - m_0 \cos \theta)^2}{\operatorname{sen}^3 \theta}\right] d\theta,$$

che integrata ci dà la $\Theta = f(\theta)$ e dalla prima delle (3) con una quadratura avremo la $\theta = \theta(t)$. Le φ e ψ come funzioni di t le otterremo dalle ultime due equazioni del sistema (2). Quindi il problema del moto risulta completamente risolto con sole quadrature.

Il procedimento si estende senza nessuna difficoltà al caso in cui il potenziale sia una qualunque funzione $V = V(\theta)$.

8. **Caso della Kowalewski.** — Riferiamoci sempre alle due terne fissate e supponiamo che l' ellissoide d' inerzia relativo ad O sia di rivoluzione e che i momenti principali d' inerzia siano legati dalle relazioni

$$A = B = 2C.$$

Supponiamo inoltre che il baricentro G sia sul piano equatoriale $\zeta = 0$, per cui sceglieremo come asse ξ la retta OG volta da O verso G, e quindi le coordinate di G siano $(a, 0, 0)$ rispetto alla terna solidale $O(\xi, \eta, \zeta)$.

Allora

$$V = -Pa \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta$$

e le equazioni canoniche prendono la forma

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\Theta}{A} \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{2\Phi - \Lambda \operatorname{cotg} \theta}{A} \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{\Lambda}{A} \\ \frac{d\Theta}{dt} &= -Pa \operatorname{sen} \varphi \cos \theta + \frac{(m_0{}^2 + \Phi^2)\cos\theta - m_0\Phi(1 + \cos^2\theta)}{A \operatorname{sen}^3 \theta} \\ \frac{d\Phi}{dt} &= -Pa \cos \varphi \operatorname{sen} \theta \\ \Psi &= m_0. \end{aligned}\right.$$

Anche qui sussiste l' integrale $\Psi = m_0$ del momento scalare delle quantità di moto rispetto all' asse z.

Per integrare il sistema (4) di rango 4, bisogna determinare un altro integrale primo che faccia scendere il rango a 2, con cui potremo quindi integrare con sole quadrature.

Tale integrale si trova considerando le espressioni

$$AX = \Theta \cos\varphi + \Lambda \operatorname{sen}\varphi, \qquad A\Xi = \Theta \operatorname{sen}\varphi - \Lambda \cos\varphi$$

poste al § 1. Derivando rispetto a t, si ha:

$$A\frac{dX}{dt} = -\frac{\Phi}{A}(\Theta \operatorname{sen}\varphi - \Lambda\cos\varphi), \tag{5}$$

$$A\frac{d\Xi}{dt} = \frac{\Phi}{A}(\Theta\cos\varphi + \Lambda \operatorname{sen}\varphi) - 2Pa\cos\theta. \tag{6}$$

Consideriamo anche i coseni direttori degli assi ξ e η rispetto all'asse z e deriviamoli anch'essi totalmente rispetto al tempo: avremo:

$$\frac{d}{dt}(\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi) = \frac{\Theta \operatorname{sen}\varphi - \Lambda\cos\varphi}{A}\cos\theta + \frac{2\Phi}{A}\operatorname{sen}\theta\cos\varphi \tag{7}$$

$$\frac{d}{dt}(\operatorname{sen}\theta\cos\varphi) = \frac{\Theta\cos\varphi + \Lambda \operatorname{sen}\varphi}{A}\cos\theta - \frac{2\Phi}{A}\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi. \tag{8}$$

Moltiplichiamo per $i = \sqrt{-1}$ la (6) e togliamola dalla (5), moltiplichiamo per i la (8) e sommiamola alla (7); eliminando $\cos\theta$ fra le due espressioni ottenute si ha

$$\frac{d}{dt}\log\{e^{-2i\varphi}(\Theta + i\Lambda)^2 + 4iaPA^2e^{-i\varphi}\operatorname{sen}\theta\} = -2i\frac{\Phi}{A}.$$

Cambiamo in questa i in $-i$ ed otteniamo:

$$\frac{d}{dt}\log\{e^{2i\varphi}(\Theta - i\Lambda)^2 - 4iaPA^2e^{i\varphi}\operatorname{sen}\theta\} = 2i\frac{\Phi}{A},$$

che sommata membro a membro con la precedente dà, con una integrazione:

$$\{(\Theta + i\Lambda)^2 + i\alpha e^{i\varphi}\operatorname{sen}\theta\}\{(\Theta - i\Lambda)^2 - i\alpha e^{-i\varphi}\operatorname{sen}\theta\} = k^2 \tag{9}$$

dove $\alpha = 4aPA^2$ e k^2 è una costante di integrazione.

La (9) è il nuovo integrale (della KOWALEWSKI) cercato che ci risolve il problema.

Infatti, considerando l'integrale dell'energia

$$H = \frac{h}{2},$$

si ricava

$$\Theta^2 + \Lambda^2 + 2\Phi^2 + 2APa\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta - Ah = 0$$

da cui, in un opportuno intervallo (t, t') in cui sia $\frac{\partial H}{\partial\theta} \neq 0$, ricaveremo

$$\Theta = \Theta(\theta, \varphi).$$

Allora considerando la 2^a e la 5^a delle (4) divise per la prima avremo:

$$\frac{d\varphi}{d\theta}=\frac{2\Phi-\Lambda \operatorname{cotg}\theta}{\Theta},$$

$$\frac{d\Phi}{d\theta}=-\frac{PAa\cos\varphi \operatorname{sen}\theta}{\Theta},$$

in cui sostituendo la $\Theta=\Theta(\theta, \varphi)$, avremo che i secondi membri sono funzioni di θ, φ, Φ. Dividendo membro a membro queste ultime avremo:

$$\frac{d\Phi}{d\varphi}=\frac{PAa \operatorname{sen}\theta\cos\varphi}{\Lambda \operatorname{cotg}\theta-2\Phi},$$

il cui secondo membro è funzione di θ, φ, Φ. Se quindi dall' integrale trovato (9), in cui avremo sostituita la $\Theta=\Theta(\theta, \varphi)$, ricaviamo la θ, essa risulterà funzione solo di φ, Φ e quindi sostituita nel secondo membro dell'ultima relazione ci dà la possibilità, con una quadratura, di avere

$$\Phi=\Phi(\varphi), \tag{10}$$

quindi ritornando nella $\theta=\theta(\varphi, \Phi)$ e sostituendovi la (10), avremo

$$\theta=\bar{\theta}(\varphi)$$

e quindi la

$$\Theta=\bar{\Theta}(\varphi);$$

così risultano le θ, Θ, Φ espresse in funzione della φ. Per risolvere in senso classico il problema basta ricavare $\varphi=\varphi(t)$ e questo lo avremo dalla 2^a delle (4) dove il secondo membro, sostituendo le funzioni trovate, sarà funzione della sola t.

Per conoscere infine la $\psi=\psi(t)$ basta servirsi della 3^a delle (4). E così il problema è completamente risolto.

4. **Caso di Eulero-Poinsot.** — Si suppone che le forze applicate al corpo ammettano un'unica risultante passante per il punto fisso O, quindi il momento delle forze applicate è nullo e sussisterà il teorema della conservazione del momento d'impulso e quindi si avrà:

$$\Theta^2+\Lambda^2+\Phi^2=l^2. \tag{11}$$

Inoltre sussisterà l'integrale dell'energia cioè

$$\frac{(\Theta\cos\varphi+\Lambda \operatorname{sen}\varphi)^2}{A}+\frac{(\Theta \operatorname{sen}\varphi-\Lambda\cos\varphi)^2}{B}+\frac{\Phi^2}{C}=h. \tag{12}$$

La costante l è il modulo del momento d'impulso.

Noi assumeremo come assi ξ, η, ζ solidali al corpo gli assi principali d'inerzia, come asse z, fisso nello spazio, la retta OP orientata da O verso P.

Proiettando OP su gli assi ξ, η, ζ otterremo:

$$(13) \qquad \begin{cases} \Theta \cos\varphi + \Lambda \operatorname{sen}\varphi = l \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ \Theta \operatorname{sen}\varphi - \Lambda \cos\varphi = - l \cos\varphi \operatorname{sen}\theta \\ \Phi = l \cos\theta. \end{cases}$$

Essendo inoltre la ψ ciclica il sistema canonico è, posto $\Psi = m_0$:

$$(14) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{1}{AB}\left\{\Theta(A \operatorname{sen}^2\varphi + B\cos^2\varphi) + (B-A)\dfrac{m_0 - \Phi\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\right\} \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{\Phi}{C} - \dfrac{1}{AB}\left\{\Theta(B-A)\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + (B\operatorname{sen}^2\varphi + A\cos^2\varphi)\dfrac{m_0 - \Phi\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right\}\operatorname{cotg}\theta \\ \dfrac{d\Theta}{dt} = \dfrac{1}{AB}\left\{\Theta(B-A)\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + (B\operatorname{sen}^2\varphi + A\cos^2\varphi)\dfrac{m_0 - \Phi\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right\}\dfrac{m_0\cos\theta - \Phi}{\operatorname{sen}^2\theta} \\ \dfrac{d\Phi}{dt} = \dfrac{A-B}{AB}\left\{\left[\Theta^2 - \left(\dfrac{m_0 - \Phi\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)^2\right]\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi + \Theta\dfrac{(\operatorname{sen}^2\varphi - \cos^2\varphi)(m_0 - \varphi\cos\theta)}{\operatorname{sen}\theta}\right\}. \end{cases}$$

Ricavando Θ dalla (11) si ha $\Theta = \Theta(\theta, \varphi, \Phi)$ che sostituita nelle (14) rende i secondi membri funzioni della θ, φ, Φ:

$$\frac{d\theta}{dt} = f_1, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = f_2, \qquad \frac{d\Theta}{dt} = f_3, \qquad \frac{d\Phi}{dt} = f_4,$$

da cui si ottiene

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{f_2}{f_1} = F(\theta, \varphi, \Phi), \qquad \frac{d\Phi}{d\theta} = \frac{f_4}{f_1} = G(\theta, \varphi, \Phi),$$

da cui avremo in definitiva

$$(15) \qquad \frac{d\Phi}{d\varphi} = \frac{G}{F} = L(\theta, \varphi, \Phi).$$

Se ora dall' integrale (12), in cui si è sostituita la $\Theta = \Theta(\theta, \varphi, \Phi)$, che scriveremo $[H] = h$, si ricava la $\theta = \theta(\varphi, \Phi)$, potremo integrare la (15) ed ottenere la

$$\Phi = \Phi(\varphi).$$

Per questo bisognerà che sia $\dfrac{\partial}{\partial t}[H] \neq 0$ cioè $\dfrac{d\Theta}{dt} \neq 0$, il che è certamente come risulta dalle (14). Ottenuta così la $\Phi = \Phi(\varphi)$ si ottengono le altre col metodo esposto nel caso 3.

5. **Casi particolari.** — La considerazione delle tre funzioni Θ, Λ, Φ porta, per altra via dalla consueta, a identificare le tre rotazioni permanenti che avvengono intorno agli assi principali d'inerzia.

Basta domandarsi cosa accada del moto quando due delle tre funzioni che compaiono nella (11) si annullano. Per esempio se $\Theta = \Lambda = 0$, il moto del corpo si riduce ad una rotazione uniforme di velocità angolare $\frac{l}{C}$ intorno all' asse ζ che si mantiene fisso e coincidente con l' asse z.

Analogamente negli altri casi: se $\Theta = \Phi = 0$ la rotazione risulta di velocità angolare $\frac{l}{B}$ intorno all' asse η, se $\varphi = 0$, e coincidente con l'asse z; oppure con velocità angolare $\frac{l}{A}$ intorno a ξ, se $\varphi = \frac{\pi}{2}$, e coincidente con l'asse z.

E inoltre: se $\Lambda = \Phi = 0$ il moto è rotatorio uniforme intorno all'asse ξ, che è ortogonale alla linea dei nodi, se $\varphi = 0$; oppure intorno all' asse η se $\varphi = \frac{\pi}{2}$, coincidendo sempre con l'asse $z \equiv OP$. Se infine si suppone l'ellissoide d'inerzia rotondo, il sistema si integra con funzioni elementari e si ricade nella precessione regolare.