Bollettino Unione Matematica Italiana

Constantin P. Bogdan

Sull'approssimazione dell'intorno di secondo ordine di una superficie mediante superficie di Veronese

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2, Vol. **1** (1939), n.2, p. 114–122.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_2_114_0>

Sull'approssimazione dell'intorno di secondo ordine di una superficie mediante superficie di Veronese.

Nota di C. P. BOGDAN (a Roma).

Sunto. - *Considerando una determinazione di una superficie di* VERONESE *si studia l'approssimazione di una superficie di un iperspazio mediante superficie di* VERONESE *e si danno diverse proprietà della superficie di* VERONESE *e delle varietà in collegamento con essa.*

1. Le superficie dello S_3 sono state diffusamente studiate e per esse è risolto il problema di costruire le calotte di diversi ordini a partire dagli elementi curvilinei che le individuano. Special- il BOMPIANI (1) ha studiato sistematicamente questo problema e lo ha risolto completamente, dando gli analoghi proiettivi dei teoremi di MEUSNIER e di EULERO.

Recentemente lo stesso BOMPIANI (2) ha risolto il problema di individuare e di costruire la calotta di 2° ordine di una superficie appartenente a uno spazio qualunque.

In quello che segue io risolvo il problema di approssimare l'intorno di 2° ordine di una superficie con $S(2)$ osculatore regolare, cioè $S(2) = S_5$ (lo spazio ambiente della superficie può essere qualunque), mediante superficie di VERONESE.

Queste superficie di VERONESE per le loro particolarissime proprietà sono comparabili per lo S_5 con le quadriche per lo S_3.

2. In una Nota recente (3) ho dato diverse determinazioni per le superficie di VERONESE mediante quartiche, coniche, punti e piani tangenti. Qui ne darò un'altra:

Siano Γ_1, Γ_2, Γ_3 tre coniche incidenti in un punto, a tangenti complanari e appartenenti ad un S_5.

Possiamo scegliere la piramide di riferimento tale che le equazioni delle tre coniche siano:

$$(2.1)\qquad \begin{array}{ll} \Gamma_1 & (x_1x_3 - x_2^2 = 0, \quad x_4 = x_5 = x_6 = 0), \\ \Gamma_2 & (x_1x_4 - x_2^2 = 0, \quad x_3 = x_5 = 0, \quad x_2 = x_6), \\ \Gamma_3 & (x_5x_1 - x_6^2 = 0, \quad x_2 = x_3 = x_4 = 0). \end{array}$$

(1) E. BOMPIANI, *Gli analoghi proiettivi dei teoremi di Meusnier e di Eulero.* « Rend. del Sem. Mat. della R. Università di Roma », 1938.

(2) E. BOMPIANI, *Costruzione delle calotte superficiali di secondo ordine in un iperspazio.* « Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei », 1939.

(3) C. P. BOGDAN, *Nuove determinazioni della superficie di Veronese.* « Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei », 1938.

Le equazioni parametriche di una superficie di VERONESE sono della forma:

$$x_i = a_{i1}\lambda^2 + a_{i2}\lambda\mu + a_{i3}\mu^2 + a_{i4}\mu\nu + a_{i5}\nu^2 + a_{i6}\nu\lambda \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6). \tag{2.2}$$

Ponendo le condizioni che la superficie (2.2) passi per la conica Γ_1 per $\nu = 0$, per la conica Γ_2 per $\mu = \nu$, per la conica Γ_3 per $\mu = 0$, e tenendo presente che le tre coniche stanno in un S_5, con convenienti cambiamenti di parametri si trova che c'è una superficie che soddisfa tutte queste condizioni. Le sue equazioni parametriche sono:

$$x_1 = \lambda^2; \quad x_2 = \lambda\mu; \quad x_3 = \mu^2 - \mu\nu; \quad x_4 = \mu\nu; \quad x_5 = -\mu\nu + \nu^2; \quad x_6 = \nu\lambda. \tag{2.3}$$

Quindi:

Per tre coniche incidenti in un punto, a tangenti complanari, appartenenti ad un S_5, *passa una e una sola superficie di Veronese.*

3. Consideriamo adesso una superficie di VERONESE e un suo punto A. I piani delle coniche della superficie passanti per il punto A formano una V_3^3, la quale è anche il cono proiettante la superficie dal punto A. I piani della varietà segano il piano tangente nel punto A secondo rette (le tangenti alle coniche nel punto A) e inoltre incidono le coniche della superficie (non passanti per il punto A) in punteggiate omografiche. Queste punteggiate sono omografiche con il fascio delle tangenti nel punto A. Dunque una tale varietà può essere individuata se si dà una omografia fra le rette di un fascio e i punti di una conica Γ, il cui piano π' non ha nessun punto comune con il piano π del fascio.

L'ordine della varietà è 3, dunque se un piano η ha più di 3 punti comuni con la varietà, ne contiene una infinità. In questo caso possiamo avere le seguenti eventualità:

1) il piano η appartiene alla varietà;

2) il piano η e la varietà hanno in comune: *a*) una retta, *b*) una retta e un punto, *c*) due rette. In questo caso il piano deve incidere il piano π base del cono varietà;

3) i punti comuni stanno su una conica.

Questo è il caso generale, e in questo caso il piano ha punti comuni con tutti gli ∞^1 piani della varietà. Dunque se un piano ha punti comuni con quattro piani della varietà, e se questi punti non sono allineati, il piano ha punti comuni con tutti i piani della varietà, e questi punti stanno su una conica. Il piano non incide il piano base del cono.

Possiamo far vedere che bastano quattro piani per individuare un tale cono varietà.

Siano π_1, π_2, π_3, π_4, quattro piani che segano un piano π secondo quattro rette t_1, t_2, t_3, t_4, concorrenti in un punto A. Questi piani non hanno in comune a due a due nessun altro punto all'infuori del punto A, e devono appartenere ad un S_5.

Siano A_1 e A_2 due punti dei piani π_1 e π_2 (diversi dal punto A) e sia C il punto dove la retta A_1A_2 incide lo $S_4 = \pi_3\pi_4$. Per il punto C passa un fascio di rette (il piano π' del fascio passa per il punto A) che si appoggiano sui due piani π_3, π_4.

Sia d una qualunque di queste rette (che non passa per il punto A) e A_3A_4 i punti di appoggio su i piani π_3 e π_4. Nel piano $\eta = A_1A_2A_3A_4$ consideriamo la conica Γ che passi per questi punti, e tale che il loro birapporto su di essa sia uguale al birapporto K delle quattro rette t_1, t_2, t_3, t_4, $k = (t_1, t_2, t_3, t_4)$.

Dunque la conica Γ è determinata, ed è pure determinata una proiettività fra le rette del fascio (A, π) e i punti di questa conica (perchè abbiamo quattro coppie di elementi corrispondenti t_1, A_1; t_2, A_2; t_3, A_3; t_4, A_4, soddisfacenti la condizione

$$(t_1, t_2, t_3, t_4) = \Gamma(A_1, A_2, A_3, A_4)).$$

Dunque abbiamo determinato una V_3^3 passante per i quattro piani.

Questa varietà è la sola che soddisfa le condizioni richieste perchè, come abbiamo visto, il piano η deve segare tutti i piani della varietà (segandone quattro) e i punti d'incidenza devono stare su una conica. Siccome c'è una sola conica passante per quattro punti e tale che il loro birapporto abbia un valore dato, segue che abbiamo una sola varietà.

Si vede subito che al variare della retta d nel fascio $(C\pi')$ le coniche corrispondenti stanno su un cono quadrico di vertice A. Segue che abbiamo ∞^5 di tali coniche distribuite su ∞^4 coni quadrici di vertice A. Quindi:

La varietà dei piani delle coniche di una superficie di Veronese passanti per un punto A *coincide con il cono proiettante la superficie da questo punto, e i suoi ∞^1 piani generatori sono incidenti nel punto* A *e segano il piano ivi tangente secondo rette. La varietà, all'infuori delle ∞^6 coniche dei piani generatori, contiene ∞^5 coniche segati dai piani della varietà in punteggiate omografiche fra loro e con le rette corrispondenti del piano tangente. Essa può essere individuata da una omografia fra i punti di una conica e le rette di un fascio (il piano del fascio non ha alcun punto comune* *con il piano della conica). Bastano quattro dei piani della varietà per individuarla.*

4. Consideriamo adesso due coniche Γ_1 e Γ_2 incidenti in un punto, e appartenenti ad un S_4. Possiamo scegliere la piramide di riferimento tale che le equazioni delle due coniche in coordinate non omogenee siano:

$$\begin{array}{lll} (4.1) & \Gamma_1 & (x_3 - x_1^2 = 0, \quad x_2 = x_4 = 0) \\ & \Gamma_2 & (x_4 - x_2^2 = 0, \quad x_1 = x_3 = 0). \end{array}$$

Cerchiamo il luogo delle rette dello S_4 ambiente che proiettano le coniche una nell'altra. Le rette cercate devono incidere il piano delle tangenti nel punto comune $O(0, 0, 0, 0)$, e possiamo individuare una di queste rette con i suoi punti

$$(\alpha_1, \alpha_2, 0, 0) \quad \text{e} \quad (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4).$$

La proiezione della conica Γ_2 sul piano della conica Γ_1 si ottiene dall'annullarsi della matrice

$$(4.2) \qquad \left\| \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & 0 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & 1 \\ X_1 & 0 & X_3 & 0 & 1 \\ 0 & x_2 & 0 & x_2^2 & 1 \end{matrix} \right\|$$

la quale dà

$$(4.3) \quad X_1 = \frac{(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)x_2^2 - \alpha_1\beta_4 x_2}{(\beta_2 - \alpha_2)x_2^2 - \beta_4 x_2 + \alpha_2\beta_4}, \quad X_3 = \frac{-\alpha_2\beta_3 x_2^2}{(\beta_2 - \alpha_2)x_2^2 - \beta_4 x_2 + \alpha_2\beta_4}.$$

Il denominatore non è identicamente nullo dovendo essere $\alpha_1, \alpha_2, \beta_3, \beta_4 \neq 0$ altrimenti la retta d avrebbe un punto comune con uno dei piani delle due coniche, in questo caso la sua proiezione sarebbe una retta.

Con queste restrizioni si vede che il denominatore non può essere identicamente nullo.

Al variare di x_2 il punto $Q(X_1, 0, X_3, 0)$ descrive una conica Γ_3

$$(4.4) \qquad A_3 X_1 + A_{11} X_1^2 + A_{13} X_1 X_3 + A_{33} X_3^2 = 0 \qquad x_2 = x_4 = 0$$

dove A_3, A_{11}, A_{13}, A_{33} verificano le equazioni

$$(4.5) \qquad \begin{aligned} -\alpha_2^2\beta_3 A_3 + \alpha_1^2\beta_4 A_{11} &= 0, \\ \alpha_2\beta_3 A_3 - 2(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\alpha_1 A_{11} + \alpha_1\alpha_2\beta_3 A_{13} &= 0, \\ \alpha_2\beta_3(\alpha_2 - \beta_2)A_3 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 A_{11} - \\ - \alpha_2\beta_3(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)A_{13} + \alpha_2^2\beta_3^2 A_{33} &= 0. \end{aligned}$$

La matrice di questo sistema lineare di equazioni omogenee ha il rango 3, dunque le incognite A_3, A_{11}, A_{13}, A_{33} non sono tutte identicamente nulle.

Consideriamo la conica Γ_3 e la conica Γ_1. Queste coniche sono tangenti nel punto $O(0, 0, 0, 0)$. Se

$$A_3 + A_{11} = 0; \tag{4.6}$$

dunque se

$$\alpha_2^2\beta_3 + \alpha_1^2\beta_4 = 0; \tag{4.7}$$

le coniche Γ_3 e Γ_1 sono osculatrici, cioè l'elemento E_2'' della conica Γ_2 con centro in origine si proietta nell'elemento E_2' corrispondente della conica Γ_1 ([4]).

Se oltre la relazione (4.6) abbiamo anche

$$A_{13} = 0, \tag{4.8}$$

dunque

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\beta_3 + 2\alpha_1\left(\beta_2 - \beta_1\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) = 0; \tag{4.9}$$

le coniche Γ_3 e Γ_1 sono sopraosculatrici, dunque l'elemento E_3'' della conica Γ_2 di centro $O(0, 0, 0, 0)$ è proiettato nell'elemento E_3' della conica Γ_1.

Se il rapporto $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ è fissato, cioè se è fissata una tangente che le rette d devono incontrare, la relazione (4.9) ci dice che le rette appartengono, oltre che allo S_3 (4.7), a un fascio di piani, aventi la tangente considerata come asse. Dunque le rette d che incidono una data tangente e proiettano gli elemenli E_3 delle coniche Γ_1 e Γ_2 uno nell'altro formano una congruenza speciale avente come asse quella tangente.

Se infine oltre le relazioni (4.6) e (4.8) si ha anche

$$A_{33} = 0 \tag{4.10}$$

cioè

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\beta_3(\beta_2 - \alpha_2) + \alpha_1\left(\beta_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\beta_1\right)^2 = 0; \tag{4.11}$$

le coniche Γ_3 e Γ_1 coincidono, dunque l'elemento E_4'' della conica Γ_2 è proiettato nell'elemento E_4' della tangente conica Γ_1. Quindi:

Dati due elementi curvilinei piani E_4' *e* E_4'' *(ossia due coniche) con centro comune e appartenenti ad un* S_4, *le rette che proiettano questi elementi uno nell'altro (le due coniche una nell'altra) e incidono una data retta del piano delle tangenti nel punto comune, stanno su un regolo di una quadrica (il cui* S_3 *è quello già determinato dal Bompiani).*

([4]) E. Bompiani, *Costruzione di una calotta.* Nota già citata.

5. Nella mia Nota già citata ho fatto l'osservazione che il cono di DEL PEZZO di un punto di una superficie di VERONESE coincide con il cono proiettante la superficie dal piano tangente nel punto considerato e contiene la superficie. Il piano tangente π in un punto A della superficie proietta l'una nell'altra due qualunque coniche della superficie non passante per il punto A di tangenza. Dunque questo piano π contiene almeno una retta proiettante le due coniche, la quale retta deve appartenere allo S_4 delle due coniche. L'intersezione di questo S_4 e del piano π è una retta passante per il punto dove il piano tangente nel punto comune alle due coniche sega il piano π.

Come abbiamo visto prima, le rette che proiettano una nell'altra due coniche incidenti in un punto e appartenenti ad un S_4, incidono il piano delle tangenti nel punto comune e formano una V_3 rigata (luogo di ∞^2 rette). Le rette della varietà che incidono una data retta del piano delle tangenti (passante per il punto comune) formano un regolo.

Per ottenere le rette che sono nei piani tangenti a una superficie di VERONESE, piani che formano una V_4^3, e proiettano una nell'altra due coniche della superficie, dobbiamo segare questa varietà dei piani tangenti con lo S_4 delle due coniche. Otteniamo una V_3^3 rigata, le cui rette sono le intersezioni dei piani tangenti con lo S_4 considerato. Tutte queste rette incidono il piano tangente nel punto comune A.

Per ottenere le rette della varietà che incidono una data tangente t per il punto A, dobbiamo segare con lo S_4 delle due coniche la V_3^3 dei piani tangenti lungo la conica Γ della superficie passante per A e ivi tangente alla retta t. Otteniamo così una superficie del 3° ordine che si spezza nel piano tangente in A e in una quadrica avente la retta t come generatrice. Dunque otteniamo così tutte le rette che proiettano l'una nell'altra le due coniche.

Si può vedere che le rette che proiettano le due coniche una sull'altra e incidono una retta d del piano tangente (non passante per il punto A) formano una V_2^3 rigata che ha quella retta come direttrice semplice. Quindi:

La varietà V_4^3 dei piani tangenti a una superficie di Veronese è il luogo delle rette che proiettano una nell'altra le coniche della superficie.

6. Adesso possiamo costruire la superficie di VERONESE determinata da tre coniche Γ_1, Γ_2, Γ_3, incidenti in un punto A, a tangenti complanari e appartenenti ad un S_5.

Sia π il piano delle tangenti t_1, t_2, t_3 delle tre coniche nel punto comune A e t una retta per A in questo piano (diversa dalle tre tangenti). Per ciascun punto di questa retta t passano tre rette complanari in un piano η che proiettano una nell'altra le tre coniche Γ_1, Γ_2, Γ_3. Questi piani η sono tangenti alla superficie di VERONESE (passante per le tre coniche) nei punti della conica Γ della superficie passante per A e ivi tangente alla retta t.

Due di questi piani hanno un punto comune, il quale insieme con la retta t determina il piano della conica Γ. Questa conica è inviluppata dai piani η considerati, dunque può essere costruita.

Abbiamo quattro piani della varietà V_3^3 luogo dei piani delle coniche della superficie per il punto A, dunque la varietà è determinata ($N-2$), e possiamo costruire il piano corrispondente a una qualunque altra tangente per A. La conica della superficie in uno di questi piani si ottiene proiettando su questo piano una delle coniche $\Gamma_i (i=1, 2, 3)$ da un piano η. Dunque possiamo così costruire la superficie.

7. Il BOMPIANI nella sua Nota citata ha mostrato che bastano 3 elementi E_2 per individuare una calotta σ_2 e ha dato la costruzione della calotta σ_2 e del cono di DEL PEZZO da essa individuato.

Io voglio vedere quante superficie di VERONESE contengono una tale calotta.

Consideriamo 3 elementi del second'ordine E_2', E_2'', E_2''' con lo stesso centro M, a tangenti complanari e appartenenti ad un S_5. Sia π il piano delle tre tangenti.

In ciascuno dei piani π_1, π_2, π_3 dei tre elementi abbiamo una rete (∞^2) di coniche che li contenga. Se prendiamo una conica di ciascuna rete abbiamo 3 coniche, le quali, come si è dimostrato, individuano una superficie di VERONESE. Dunque vi sono ∞^6 superficie di VERONESE che contengono la calotta σ_2, e coniche in π_1, π_2, π_3.

Ma ciascun π_i può variare in un fascio. Gli S_3 di questi fasci sono S_3 del cono di DEL PEZZO relativo a σ_2, e sono determinati dal piano π e rispettivamente dai piani π_1, π_2, π_3.

Dunque segue che vi sono ∞^9 superficie di VERONESE contenenti la calotta σ_2. Tutte queste superficie appartengono al cono di DEL PEZZO relativo alla calotta σ_2.

Abbiamo visto che quattro piani individuano la varietà dei piani delle coniche per un punto. Siccome vi sono ∞^6 superficie che hanno in comune (all'infuori della calotta σ_2) 3 piani delle coniche e siccome i piani delle coniche relativi a una data tangente formano un fascio, segue che vi sono ∞^5 superficie che hanno in comune la varietà dei piani delle coniche per il punto M.

Quindi:

Vi sono ∞^9 superficie di Veronese che contengono una data calotta del second'ordine σ_2. Fra queste ∞^5 hanno comune la varietà V_3^3 dei piani delle coniche per il centro della calotta.

8. Possiamo vedere quante superficie di VERONESE (quante calotte di 2° ordine) appartengono a un dato cono di DEL PEZZO.

Il BOMPIANI nella sua Nota citata ha mostrato che il cono di DEL PEZZO è determinato da tre elementi di 2° ordine, ma che non cambia se ai tre elementi dati si sostituiscono tre nuovi elementi (con le stesse tangenti e piani osculatori) aventi con quelli lo stesso invariante di contatto. Dunque con questo cambiamento il cono di DEL PEZZO non cambia, invece la calotta σ_2 cambia, pur rimanendo nel detto cono, e determinando la stessa proiettività fra le tangenti e gli S_3 generatori del cono. La proiettività è la stessa perchè ha in comune con la prima le coppie corrispondenti ai tre elementi dati.

Dunque vi sono ∞^1 calotte del second'ordine che appartengono a un cono di DEL PEZZO dato, tangenti nello stesso punto al piano vertice del cono e che determinano la stessa proiettività fra le tangenti e gli S_3 generatori del cono. Siccome abbiamo ∞^3 proiettività fra le rette di un fascio e gli S_3 generatori del cono, segue che vi sono ∞^4 calotte del second'ordine appartenenti a un dato cono di DEL PEZZO e tangenti in un punto al piano vertice del cono.

Dunque:

Vi sono ∞^{13} superficie di Veronese appartenenti a un dato cono di Del Pezzo e tangenti nello stesso punto al piano vertice del cono. Fra queste ∞^{10} determinano la stessa proiettività fra le tangenti e gli S_3 generatori del cono:

Siccome il punto di tangenza può essere preso ad arbitrio nel piano vertice del cono, segue:

Un dato cono di Del Pezzo contiene ∞^{15} superficie di Veronese.

Abbiamo visto che vi sono ∞^5 superficie di VERONESE che all'infuori della calotta del second'ordine, hanno comune anche la varietà V_3^3 dei piani delle coniche per il centro della calotta. Siccome vi sono ∞^1 di tali calotte segue che vi sono ∞^6 superficie di VERONESE appartenenti alla stessa varietà V_3^3.

Quindi:

Una varietà V_3^3 dei piani delle coniche di una superficie di Veronese per un punto contiene ∞^6 superficie di Veronese.

Una tale varietà è determinata da quattro dei snoi piani, dunque se consideriamo un punto A del piano π vertice di un cono di DEL PEZZO e una proiettività fra le rette del fascio (A, π) e gli S_3 generatori del cono, segue che vi sono ∞^4 V_3^2 che appartengono al cono e hanno lo stesso vertice nel piano π. Siccome vi sono ∞^3 proiettività, e il punto A può essere preso ad arbitrio nel piano π segue:

Un dato cono di Del Pezzo contiene ∞^9 *coni varietà* V_3^3. *Fra questi* ∞^7 *hanno lo stesso punto* A *del piano* π *(vertice del cono di Del Pezzo dato) come vertice; e* ∞^4 *determinano la stessa proiettività fra le rette del fascio* (A, π) *e gli* S_3 *generatori del cono di Del Pezzo.*