
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

FERNANDO GIACCARDI

Di un procedimento elementare per lo sviluppo di una funzione in serie di Bessel

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2,
Vol. 1 (1939), n.2, p. 108–113.

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_2_108_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_2_108_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

**Di un procedimento elementare per lo sviluppo
di una funzione in serie di BESSEL.**

Nota di FERNANDO GIACCARDI (a Torino).

Sunto. - *Si dà una semplice dimostrazione che legittima lo sviluppo di una funzione in serie di BESSEL.*

1. Dall'espressione generatrice delle funzioni di BESSEL:

$$(1) \quad e^{\frac{1}{2}v(t-t^{-1})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(v)t^n,$$

posto $v = 2\theta$, la (1) diviene

$$e^{\theta(t-t^{-1})} = J_0(2\theta) + J_1(2\theta)(t - t^{-1}) + J_2(2\theta)(t^2 + t^{-2}) + \dots$$

ed operando la sostituzione

$$u = t - t^{-1},$$

si potrà scrivere:

$$e^{6u} = J_0(2\theta) + J_1(2\theta)u + J_2(2\theta)(2 + u^2) + J_3(2\theta)(3u + u^3) + \dots$$

o. ciò che è lo stesso,

$$(2) \quad e^{6u} = J_0(2\theta) + \sum_{h=1}^{\infty} J_h(2\theta) \sum_{n=0}^h H_{[h,n]} u^n,$$

ove

$$(3) \quad H_{[h,n]} = \frac{\left(\frac{h+n}{2} - 1\right)! h}{\left(\frac{h-n}{2}\right)! n!},$$

convenendo di porre

$$H_{[h,n]} = 0$$

se h è *pari* (dispari) ed n *dispari* (pari).

La serie (2) è uniformemente ed assolutamente convergente per ogni valore finito, reale o complesso, di u e reale di θ , e ciò per l'uniforme ed assoluta convergenza della (1) per r reale qualunque e per t complesso qualunque, ad eccezione di $t=0$, $t=\infty$, essendo però trasferiti, dalla $u = t - t^{-1}$, i due punti particolari, $t=0$, $t=\infty$, nell'unico $u = \infty$.

Sostituendo in (2), x/θ ad u si ha

$$(4) \quad \begin{aligned} e^x &= J_0(2\theta) + J_1(2\theta) \frac{x}{\theta} + J_2(2\theta) \left(2 + \frac{x^2}{\theta^2}\right) + J_3(2\theta) \left(3 \frac{x}{\theta} + \frac{x^3}{\theta^3}\right) + \dots = \\ &= J_0(2\theta) + 2 \sum_{h=1}^{\infty} J_{2h}(2\theta) + \frac{x}{\theta} \sum_{h=1}^{\infty} H_{[2h-1,1]} \cdot J_{2h-1}(2\theta) + \\ &+ \frac{x^2}{\theta^2} \sum_{h=1}^{\infty} H_{[2h-2]} \cdot J_{2h}(\theta) + \frac{x^3}{\theta^3} \cdot \sum_{h=2}^{\infty} H_{[2h-1,3]} \cdot J_{2h-1}(2\theta) + \dots \end{aligned}$$

2. La serie che è al secondo membro della (4) è una serie di polinomi in x , uniformemente convergente in una regione C qualunque (purchè finita) del campo complesso. perciò, per dimostrare che sussiste la relazione (4) di eguaglianza fra il secondo ed il terzo membro, occorre mostrare che la serie al terzo membro è convergente e rappresenta la funzione data dalla serie del secondo membro.

A tal fine, osservando che la serie al terzo membro non è che la serie di potenze di x ottenuta ordinando materialmente la serie al secondo membro, secondo le potenze di x , il nostro scopo sarà raggiunto quando siasi dimostrato che:

« Se una serie di polinomi

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_i(x)$$

(P_i è simbolo di polinomio di grado i nella variabile x) converge uniformemente in un cerchio C dal piano complesso avente il centro in $x=0$, ponendo

$$P_i(x) = \sum_{j=0}^i \alpha_{ij} x^j,$$

(con α_{ij} costanti), la serie di potenze

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=i}^{\infty} \alpha_{ij} \right) x^i$$

è pure convergente in C e rappresenta la stessa funzione della serie data ».

Per dimostrare ciò, osserviamo che, per un noto teorema di WEIERSTRASS sulle serie di funzioni olomorfe in C (quali sono i polinomi termini della nostra serie), la serie data rappresenta in C una funzione olomorfa $F(x)$, le cui derivate in un punto qualunque di C si ottengono derivando termine a termine tale serie, cioè

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} F(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d^n P_i(x)}{dx^n} = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{d^n P_i(x)}{dx^n} = \\ &= \sum_{i=n}^{\infty} \left\{ \frac{i!}{(i-n)!} \alpha_{i,i} x^{i-n} + \dots + \frac{(n+2)!}{2!} \alpha_{i,n+2} x^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(n+1)!}{1!} \alpha_{i,n+1} x + \frac{n!}{0!} \alpha_{i,n} \right\}. \end{aligned}$$

Segue allora che la funzione $F(x)$ è rappresentabile in C (per il teorema di CAUCHY) mediante la serie di potenze che converge in tutto il cerchio C :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

ma da quanto precede si ha

$$F^{(n)}(x) = n! \sum_{i=n}^{\infty} \alpha_{i,n} x^{i-n},$$

perciò, in tutto il cerchio C è

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=n}^{\infty} \alpha_{i,n} \right) x^n = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=i}^{\infty} \alpha_{ij} \right) x^i,$$

ossia la serie trovata, (che è quella ottenuta ordinando material-

mente la serie data), converge in tutto il cerchio C e rappresenta in esso la $F(x)$, cioè in C si ha

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^i \alpha_{ij} x^j \right) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i \left(\sum_{j=i}^{\infty} \alpha_{ji} \right).$$

3. Dal confronto allora della (4) con lo sviluppo in serie di MAC LAURIN di e^x , segue

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 = J_0(2\theta) + 2 \sum_{h=1}^{\infty} J_{2h}(2\theta), \quad \frac{\theta}{2} = \sum_{h=1}^{\infty} H_{[2h-1,1]} \cdot J_{2h-1}(\theta), \\ \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2!} = \sum_{h=1}^{\infty} H_{[2h,2]} \cdot J_{2h}(\theta), \quad \left(\frac{\theta}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3!} = \sum_{h=2}^{\infty} H_{[2h-1,3]} \cdot J_{2h-1}(\theta); \end{array} \right.$$

ed in generale

$$\left(\frac{\theta}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} = \sum_{h=\frac{n+1}{2}}^{\infty} H_{[2h-1,n]} \cdot J_{2h-1}(\theta), \quad \text{se } n \text{ è dispari}$$

$$\left(\frac{\theta}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} = \sum_{h=\frac{n}{2}}^{\infty} H_{[2h,n]} \cdot J_{2h}(\theta), \quad \text{se } n \text{ è pari.}$$

Si possono riunire entrambe le formule precedenti qualunque sia n , scrivendo

$$(6) \quad \frac{\theta^n}{n!} = 2^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} H_{[n+2k,n]} \cdot J_{n+2k}(\theta),$$

che per la (3) risulta

$$(7) \quad \frac{\theta^n}{n!} = 2^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \frac{n+2k}{n+k} \cdot J_{n+2k}(\theta).$$

Segue allora da

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!},$$

tenendo conto della (7) in cui si è posto $\theta = x$:

$$(8) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \cdot 2^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \frac{n+2k}{n+k} J_{n+2k}(x),$$

e sviluppando ed ordinando

$$\begin{aligned} f(x) = & f(0)J_0(x) + 2f'(0)J_1(x) + [2^2 \cdot f''(0) + 2f(0)]J_2(x) + \\ & + [2^3 \cdot f'''(0) + 2 \cdot 3 \cdot f''(0)]J_3(x) + [2^4 \cdot f^{(iv)}(0) + \\ & + 2^2 \cdot 4 \cdot f''(0) + 2f(0)]J_4(x) + \dots \end{aligned}$$

Si ha dunque

$$(9) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n(x)$$

ed a_n risulta espresso da

$$a_n = 2^n \cdot f^{(n)}(0) + 2^{n-2} f^{(n-2)}(0) H_{[n, n-2]} + \\ 2^{n-4} f^{(n-4)}(0) H_{[n, n-4]} + \dots + H_{[n, 0]} f(0),$$

o. ciò che è lo stesso,

$$(10) \quad a_n = \sum_{s=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} 2^{n-2s} \cdot f^{(n-2s)}(0) \cdot \frac{(n-s-1)! n}{s!(n-2s)!},$$

dove il simbolo $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, indica il massimo intero contenuto in $\frac{n}{2}$.

4. Poichè per $n + 2k > 1$ e per $|x|$ abbastanza piccolo rispetto ad $n + 2k$ risulta (*)

$$|J_{n+2k}(x)| < \frac{\left| \frac{x}{2} \right|^{n+2k}}{(n+2k)!},$$

la (8) potrà scriversi

$$|f(x)| \leq \sum_{n, k=0}^{\infty} |f^{(n)}(0)| \cdot 2^n \cdot \binom{n+k}{k} \frac{n+2k}{n+k} |J_{n+2k}(x)| < \\ < \sum_{n, k=0}^{\infty} |f^{(n)}(0)| \frac{(n+k-1)! |x|^{n+2k}}{k! n! (n+2k-1)! 2^{2k}},$$

ed in quanto, per $k > 0$, è

$$\frac{(n+k-1)!}{(n+2k-1)!} < 1,$$

(*) Infatti si ha

$$J_m(x) = \sum_{z=0}^{\infty} (-1)^z \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2z}}{2^{m+2z} \cdot z! (m+z)!} = \\ = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^m}{(m-1)!} \sum_{z=0}^{\infty} (-1)^z \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2z}}{z! m(m+1) \dots (m+z)} = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^m}{m!} (1 - \varepsilon_m),$$

0 < $\varepsilon_m < 1$, perciò

$$|J_m(x)| < \frac{\left| \frac{x}{2} \right|^m}{m!}.$$

sarà a maggior ragione

$$(11) \quad |f(x)| < \sum_{n, k=0}^{\infty} |f^{(n)}(0)| \frac{|x|^n}{n!} \cdot \frac{\left|\frac{x}{2}\right|^{2k}}{k!}$$

e ciò significa che la (8), ha per maggiorante il secondo membro della (11).

Ma

$$(12) \quad g(x) = \sum_{n, k=0}^{\infty} |f^{(n)}(0)| \cdot \frac{|x|^n}{n!} \cdot \frac{\left|\frac{x^2}{4}\right|^k}{k!}.$$

è sommabile per quadrati, per righe e per colonne, essendo assolutamente convergente, (in quanto è il prodotto di due serie semplici assolutamente convergenti), perciò la serie prodotto converge verso

$$e^{\frac{x^2}{4}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |f^{(n)}(0)| \frac{|x|^n}{n!},$$

(espressione che si ottiene anche sommando la (12) prima rispetto a k , poi rispetto ad n), essendo $\sum_{n=0}^{\infty}$ convergente uniformemente nel cerchio γ di convergenza della $f(x)$, centro zero.

Ne segue perciò che le operazioni eseguite sviluppando, ordinando e raccogliendo per passare dalla (8) alla (9) sono lecite in quanto sono legittime le corrispondenti nella serie maggiorante.

La (9), quindi, converge nel cerchio γ .

Lo sviluppo (9) è noto, il procedimento di cui ci siamo serviti per dedurlo è diverso, più semplice ed immediato di quello generalmente seguito. (Cfr. W. KAPTEYN, *Ann. de l'Ecole norm. sup.* (3), X, p. 106, 1893; WHITTAKER E WATSON, *Modern Analysis*, 4^a ed., 1935, p. 374).

Applicazione. Sia da sviluppare $f(z) = \frac{1}{t-z}$ in serie di funzioni di BESSEL.

Dalla (9) si ha

$$f(z) = \frac{J_0(z)}{t} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_n(z) = \frac{J_0(z)}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(z) \cdot \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{2^{n-2s} (n-2s)!}{t^{n-2s+1}} H_{[n, n-2s]}$$

perciò:

$$f(z) = \frac{1}{t-z} + \frac{J_0(z)}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n}{t^{n+1}} \cdot J_n(z) \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(n-s-1)!}{s!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2s}.$$