

---

# BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

GUSTAV DOETSCH

Über die Abhandlung von M.  
Picone: Formule risolutive e  
condizioni di compatibilità per  
alcuni problemi di propagazione

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2,*  
Vol. 1 (1939), n.2, p. 105–108.

Unione Matematica Italiana

<[http:](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_2_105_0)  
[//www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_1939\\_2\\_1\\_2\\_105\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_2_105_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1939.

**Über die Abhandlung von M. Picone:  
Formule risolutive e condizioni di compatibilità per alcuni  
problemi di propagazione (\*).**

Von GUSTAV DOETSCH (Freiburg i. B.).

In meinem Buch « *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation* » (Berlin, J. Springer, 1937), Historische Anmerkung 220 (S. 422), habe ich zu den in der oben genannten Arbeit enthaltenen Eindeutigkeitsbeweisen bemerkt, dass sie illusorisch sind, weil sich unter den dort S. 716 formulierten Voraussetzungen nicht beweisen lässt, dass die Laplace-Transformation mit den Ableitungen nach den räumlichen Variablen und mit dem Streben der räumlichen Variablen gegen die Berandung des Gebietes vertauschbar ist. Veranlasst durch einen Briefwechsel mit Herrn Picone möchte ich erklären, dass diese Lücke sich dadurch ausfüllen lässt, dass man die majorisierenden Funktionen  $M_k(P, \tau)$  in [4] und [5] S. 716 als hinsichtlich  $P$  beschränkt voraussetzt oder, was dasselbe ist, durch eine nur von  $\tau$  abhängige Funktion  $M(\tau)$  ersetzt. Unter dieser Zusatzvoraussetzung sind die in der Arbeit ausgesprochenen Eindeutigkeitsätze richtig.

Aggiunta di M. PICONE (Roma). — La mia Memoria sopracitata tratta dell'integrazione dell'equazione

$$(1) \quad \Delta_2 u + A_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A_1 \frac{\partial u}{\partial t} + A_0 u = B(x, y, z, t),$$

(\*) (« Memorie della Reale Accademia d'Italia », vol. V, 1934).

per  $P(x, y, z)$  in un dominio regolare  $T$  e per  $t \geq 0$ , nella quale i coefficienti  $A_0, A_1, A_2$  sono costanti affatto arbitrarie, con le condizioni iniziali

$$(2) \quad u(x, y, z, 0) = f(x, y, z), \quad u_t(x, y, z, 0) = f_1(x, y, z)$$

e al contorno

$$(3) \quad \left[ \alpha(x, y, z)u + \beta(x, y, z) \frac{du}{dP} \right]_{\text{su } FT} = \gamma(x, y, z, t),$$

ove  $f, f_1, \alpha, \beta, \gamma$  sono funzioni assegnate, l'operatore  $\frac{d}{dP}$  designando la derivazione secondo la normale alla frontiera  $FT$  di  $T$ , volta verso l'interno di  $T$ .

Per la soluzione  $u$  del problema si leggono, nella Memoria, a pag. 716, le ipotesi seguenti:

« ... la  $u$ , con ognuna delle sue derivate che compare nella (1), è finita e continua e, per ogni punto  $P(x, y, z)$  di  $T$  e per ogni costante positiva  $\tau$ , esistono le cinque funzioni finite e positive  $M_k(P, \tau)$  ( $k=0, 1, \dots, 4$ ), per le quali risulta, ovunque in  $T$  e per  $t \geq 0$ ,

$$(4) \quad \begin{aligned} |u(P, t)| &< M_0(P, \tau)e^{-\tau t}, & |u_x(P, t)| &< M_1(P, \tau)e^{-\tau t}, \\ |u_y(P, t)| &< M_2(P, \tau)e^{-\tau t}, & |u_z(P, t)| &< M_3(P, \tau)e^{-\tau t}, \\ |u_t(P, t)| &< M_4(P, \tau)e^{-\tau t}. \end{aligned}$$

Per legittimare i procedimenti seguiti nella Memoria basta sostituire, nelle ipotesi ora dette, l'attributo di finite dato alle funzioni  $M_k(P, \tau)$  con quello di limitate, ed allora, come giustamente osserva il DOETSCH, si può porre, in luogo delle  $M_k(P, \tau)$ , un'unica funzione  $M(\tau)$ , indipendente da  $P$ , che, per ogni  $\tau$ , segui un numero non superato, in  $T$ , dalle

$$|u(P, t)|e^{-\tau t}, \quad |u_x(P, t)|e^{-\tau t}, \dots, \quad |u_t(P, t)|e^{-\tau t}.$$

Nelle pratiche applicazioni si presentano però, per tali funzioni, più facilmente, maggiorazioni effettuate da funzioni  $M_k(P, \tau)$  dipendenti anche dal punto  $P$ , ed allora la limitatezza, in  $T$ , delle  $M_k(P, \tau)$  è una conseguenza della loro continuità rispetto al punto  $P$ , la quale può essere constatata con sole considerazioni locali, senza che occorra cioè la ricerca, per ogni  $\tau$ , dell'estremo superiore, in  $T$ , delle  $M_k(P, \tau)$ .

Questa la genesi del mio enunciato, sopra ricordato, delle ipotesi per la soluzione  $u$ , nel quale, per mero caso, senza che io, ovviamente, potessi avere l'intenzione di farlo, è stato ommesso l'attributo di continue, in aggiunta a quelli di finite e positive, colà dati alla funzione  $M_k(P, \tau)$ .

E con tale aggiunta, in considerazione delle pratiche applicazioni, che mi ha fatto anche preferire l'introduzione delle limita-

zioni (4), per le  $|u|, \dots, |u_n|$ , alla uniforme convergenza degli integrali

$$\int_0^{\infty} u(P, t)e^{-t} dt, \dots, \int_0^{\infty} u_n(P, t)e^{-t} dt,$$

io sarei per conservare la forma del mio enunciato.

*Ulteriore attenuazione delle ipotesi nelle quali valgono i teoremi della citata mia Memoria.* — Nel riprendere oggi in considerazione i procedimenti di tale Memoria, che conducono a notevoli formole risolutive e condizioni di compatibilità, solo in parte esposte nel citato libro del DOETSCH, ho constatato che è possibile un'ulteriore efficace attenuazione delle ipotesi fatte per la soluzione  $u$ . Si ha cioè che, ferme restando le altre ipotesi, basta richiedere la continuità delle derivate seconde  $u_{xx}, u_{yy}, u_{zz}, u_{tt}$ , soltanto nei punti interni a  $T$  e per  $t > 0$ .

Detta, invero,  $v(P, t)$  una qualsivoglia soluzione dell'equazione

$$\Delta_2 v + A_2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - A_1 \frac{\partial v}{\partial t} + A_0 v = 0,$$

che possieda le qualità ammesse per la  $u$ , per due qualsivogliano numeri positivi  $a$  e  $b$  ( $b > a$ ) e per ogni dominio regolare  $T'$ , interno a  $T$ , si ha:

$$\left[ \iiint_{T'} \right] A_2 \left( v \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial v}{\partial t} \right) + A_1 uv \Big|_{t=a}^{t=b} - \\ - \int_a^b dt \iiint_{FT'} \left( v \frac{du}{dP} - u \frac{dv}{dP} \right) d\sigma = \int_a^b dt \iiint_{T'} BvdT.$$

e quindi, posto  $v = V(P, \tau)e^{-\tau t}$ , passando al limite per  $b \rightarrow +\infty$ , poi per  $a \rightarrow 0$  ed infine per  $T' \rightarrow T$ , si ricade nella formola fondamentale (24) di pag. 724 della Memoria.

*Sul metodo d'integrazione seguito nella mia Nota: « Una proprietà integrale delle soluzioni dell'equazione del calore e sue applicazioni », (« Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari », anno III, 1932).* In questa Nota ho studiato anche il classico problema dell'integrazione dell'equazione del calore

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

nella semistriscia  $S$  definita dalle limitazioni

$$x_1 \leq x \leq x_2, \quad t \geq 0,$$

con le condizioni al contorno

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow x_1} u(x, t) = u_1(t), \quad \lim_{x \rightarrow x_2} u(x, t) = u_2(t), \quad u(x, 0) = f(x).$$

seguendo un procedimento di cui non si fa menzione nel citato libro del DOETSCH <sup>(1)</sup>. Io ritengo però detto procedimento non del tutto trascurabile e ho avuto oggi occasione di osservare che esso conduce alla formola risolutiva nel seguente gruppo di ipotesi, ancora più ampie di quelle contemplate nella Nota citata:

a) in ogni punto *interno* alle  $S$  sono finite e continue

$$u, u_x, u_t;$$

b) per ogni punto  $(x, 0)$ , con  $x_1 < x < x_2$ , sono, in  $S$ , finite e continue

$$u \text{ e } u_x;$$

c) comunque si assuma un numero positivo  $\tau$ , si può determinare un numero positivo e finito  $M(\tau)$ , tale che, in  $S$ , riesca

$$|u(x, t)| < M(\tau)e^{\tau t};$$

d) comunque si assuma  $\tau > 0$ , l'integrale

$$\int_0^{+\infty} u_x(x, t)e^{-\tau t} dt,$$

riesce uniformemente convergente al variare di  $x$  in ogni intervallo interno all'intervallo  $(x_1, x_2)$ .

Ed in tale ipotesi si può richiedere che le prime due delle (5) sussistano a meno di un insieme di valori di  $t$  di misura nulla e l'ultima per  $x_1 < x < x_2$ .

<sup>(1)</sup> Con tale omissione il libro del DOETSCH non cessa però, ben inteso, di essere, anche secondo il mio avviso, un'opera di grande valore e per la teoria e per molte applicazioni.