
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GENEROSO GALLUCCI

Su un notevole gruppo di triangoli associati

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2,
Vol. 1 (1939), n.1, p. 81-83.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_1_81_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1939.

Su un notevole gruppo di triangoli associati.

Nota di G. GALLUCCI (a Napoli).

Sunto. - Si tratta del gruppo formato da due terne cicliche di triangoli e delle proprietà delle coppie di triangoli inscritti in un triangolo ABC ed omologici con questo.

1. Siano $A'B'C'$, $A''B''C''$ due triangoli inscritti nel triangolo ABC in modo che A' , A'' si trovino su BC ; B' , B'' su CA e C' , C'' su AB . Si ponga: $A_1 \equiv B'C' \cdot B''C''$; $B_1 \equiv C'A' \cdot C''A''$ e $C_1 \equiv A'B' \cdot A''B''$. Si dimostra che: se B_1C_1 passa per A , C_1A_1 passerà per B ed A_1B_1 passerà per C .

Infatti, consideriamo i due esagoni semplici $C_1A'B_1CAB$, $C_1A''B_1CAB$ inscritti nelle due rette C_1AB_1 , $CA'B$. Per il primo i tre punti $C_1A' \cdot CA \equiv B'$; $A'B_1 \cdot AB \equiv C'$ e $B_1C \cdot BC_1$ sono in linea retta, e per il secondo sono allineati i tre punti: $C_1A'' \cdot CA \equiv B''$; $A''B_1 \cdot AB \equiv C''$ e $B_1C \cdot BC_1$. Dunque il punto $B_1C \cdot BC_1$ dovrà trovarsi su $B'C'$ e su $B''C''$ e perciò dovrà coincidere con A_1 . Si conclude che C_1A_1 passa per B ed A_1B_1 passa per C .

I quattro triangoli $A'B'C'$, $A''B''C''$, $A_1B_1C_1$, ABC formano due terne cicliche: la prima terna è formata da $A_1B_1C_1$, $A'B'C'$, ABC (il 1° inscritto nel 2°, il 2° nel 3° ed il 3° nel 1°), la seconda terna è formata da $A_1B_1C_1$, $A''B''C''$, ABC (il 1° inscritto nel 2°, il 2° nel 3° ed il 3° nel 1°).

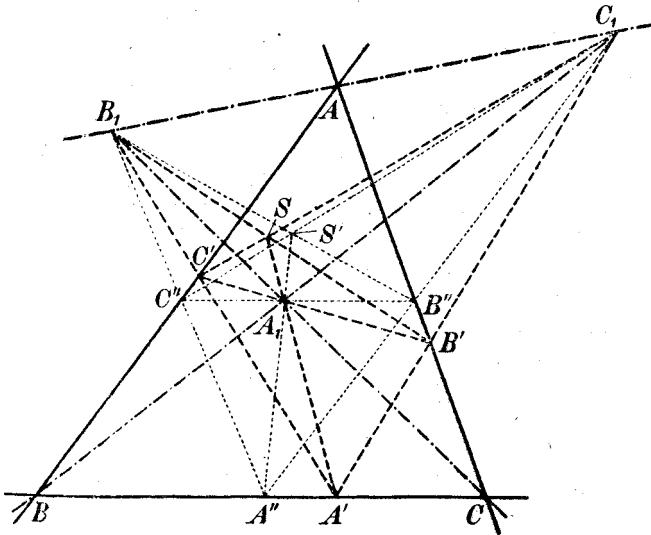
2. Diremo che i triangoli $A'B'C'$, $A''B''C''$ inscritti in ABC sono *ciclicamente associati* ad ABC .

Dato il triangolo ABC , si possono, in infiniti modi, determinare due triangoli inscritti in ABC e ciclicamente associati ad ABC . Scelti due punti B_1, C_1 allineati con A , siano A', A'' due punti generici di CB . Allora porremo: $AC \cdot C_1 A' \equiv B'$; $AC \cdot A'' C_1 \equiv B''$; $AB \cdot B_1 A' \equiv C'$ ed $AB \cdot B_1 A'' \equiv C''$. I due triangoli $A'B'C'$, $A''B''C''$ saranno inscritti in ABC e ciclicamente associati con ABC .

3. Siano $A'''B'''C'''$ i punti d'incontro dei lati di ABC con i lati corrispondenti di $A'B'C'$ ed $A^{IV}B^{IV}C^{IV}$ i punti d'incontro dei lati di ABC con i lati corrispondenti di $A''B''C''$. Per il teorema di PASCAL si avranno i seguenti sei gruppi di punti su altrettante coniche:

$$\left\{ \begin{array}{l} A''B''C''A'B'''C''' \\ A''B''C''B'C'''A''' \\ A''B''C''C'A'''B''' \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} A'B'C'A''B^{IV}C^{IV} \\ A'B'C'B''C^{IV}A^{IV} \\ A'B'C'C''A^{IV}B^{IV} \end{array} \right.$$

Consideriamo ora i nove punti: $A'B'C'$, $A''B''C''$, $A'''B'''C'''$; presi di questi sei punti che sono su una conica, per es. $A''B''C''$,



$A'B'''C'''$, gli altri tre, cioè $B'C'A'''$ saranno in linea retta (poichè $A''' \equiv B'C' \cdot BC$). Dunque, per i detti nove punti passano tre cubiche composte ognuna di una conica e di una retta. Lo stesso può dirsi per gli altri nove punti $A'B'C'$, $A''B''C''$, $A^{IV}B^{IV}C^{IV}$. Dunque: se

due triangoli $A'B'C'$, $A''B''C''$ sono ciclicamente associati rispetto ad un triangolo ABC , i loro sei vertici ed i punti d'incontro dei lati di uno di essi con i lati corrispondenti di ABC sono nove punti base di un fascio di cubiche.

In particolare, se $A'''B'''C'''$ sono in linea retta, i sei punti $A'B'C'$, $A''B''C''$ sono su una conica, ed allora, anche $A^{IV}B^{IV}C^{IV}$ sono in linea retta. Cioè: se di due triangoli ciclicamente associati con ABC uno è omologico con ABC , anche l'altro sarà omologico con ABC ed i sei vertici sono su una conica. Reciprocamente: se due triangoli ciclicamente associati con ABC hanno i vertici su una conica, essi sono entrambi omologici con ABC (vedi la figura).

4. Dai nn.ⁱ 1, 2, 3 risultano numerose proprietà. Noteremo le seguenti: 1^a) Se due triangoli $A'B'C'$, $A''B''C''$ sono ciclicamente associati con ABC ed inscritti in una conica γ , il triangolo $A_1B_1C_1$ dei punti d'incontro delle coppie di lati corrispondenti è autoreciproco rispetto a γ ed è omologico tanto con $A'B'C'$ quanto con $A''B''C''$; i due centri d'omologia S , S' sono su γ . 2^a) Se due triangoli $A'B'C'$, $A''B''C''$ sono ciclicamente associati con ABC ed inscritti in una conica γ , essi risultano circoscritti ad un'altra conica γ_1 . Il triangolo ABC è autoreciproco rispetto a γ_1 , ed omologico con $A'B'C'$, $A''B''C''$; i due assi d'omologia s , s' sono tangenti a γ_1 .

5. Siano $A'B'C'$ i piedi delle altezze di un triangolo ABC ed $A''B''C''$ i punti medi dei lati; i due triangoli $A'B'C'$, $A''B''C''$ saranno ciclicamente associati con ABC ed inscritti in una conica (il cerchio dei nove punti); allora essi saranno circoscritti ad un'altra conica γ , alla quale dovranno risultare tangenti l'asse ortico (asse d'omologia di ABC , $A'B'C'$) e la retta all'infinito (asse d'omologia di ABC , $A''B''C''$). Concluderemo che: In ogni triangolo ABC , i lati del triangolo ortico, i lati del triangolo mediano e l'asse ortico sono tangenti ad una parabola rispetto alla quale il triangolo ABC è autoreciproco.