
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

FILIPPO SIBIRANI

Di una identità numerica

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2,
Vol. 1 (1939), n.1, p. 80–81.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_1_80_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Di una identità numerica.

Nota di F. SIBIRANI (a Bologna).

Sunto. - Si richiama una formula da cui discende l'identità stabilita da F. CONFORTO ed altre analoghe.

Il NETTO ha stabilita l'identità ⁽¹⁾

$$(1) \quad \binom{n}{r} \cdot \binom{n}{r+q} + \binom{n}{r+2q} + \dots = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} \left(2 \cos \frac{k\pi}{q} \right)^n \cos \frac{k(n-2r)\pi}{q}$$

con $r < q$; da essa si ricava quella data da F. CONFORTO nella precedente Nota ed altre analoghe.

Se nella (1) si pone $n = 2s + q$, ed r eguale al resto della divisione di s per q , il primo membro diviene il doppio di

$$\binom{2s+q}{s} + \binom{2s+q}{s-q} + \binom{2s+q}{s-2q} + \dots$$

e dall'essere $r = s - qE\left(\frac{s}{q}\right)$, ne risulta

$$\cos \frac{k(n-2r)\pi}{q} = \cos \left[\left\{ 2E\left(\frac{s}{q}\right) + 1 \right\} k\pi \right] = (-1)^k,$$

perciò si ottiene

$$(2) \quad \binom{2s+q}{s} + \binom{2s+q}{s-q} + \binom{2s+q}{s-2q} + \dots = \\ = \frac{2^{2s+q-1}}{q} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{E\left(\frac{q-1}{2}\right)} (-1)^k \cos^{2s+q} \frac{k\pi}{q} \right].$$

⁽¹⁾ E. NETTO, *Lehrbuch der Combinatorik*, Leipzig 1901, pag. 20.

Se nella (2) si fa $q = 2$, si ha la ben nota identità

$$\binom{2s+2}{s} + \binom{2s+2}{s-2} + \binom{2s+2}{s-4} + \dots = 2^{2s};$$

se si fa $q = 3$, si ha

$$\binom{2s+3}{s} + \binom{2s+3}{s-3} + \binom{2s+3}{s-6} + \dots = \frac{1}{3}(2^{2s+2} - 1);$$

se si fa $q = 4$, si ha

$$\binom{2s+4}{s} + \binom{2s+4}{s-4} + \binom{2s+4}{s-8} + \dots = 2^s(2^{s+1} - 1)$$

la quale, col porre $s = p - 1$, coincide con l'identità dimostrata dal CONFORTO; se si fa $q = 6$, si ha

$$\binom{2s+6}{s} + \binom{2s+6}{s-6} + \binom{2s+6}{s-12} + \dots = \frac{1}{6}[2^{2s+5} - 3^{s+3} + 1].$$