BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA
ITALIANA

FILIPPO SIBIRANI

Di una identità numerica

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2,
Vol. **1** (1939), n.1, p. 80–81.
Unione Matematica Italiana
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_1_80_0>

Di una identità numerica.

Nota di F. SIBIRANI (a Bologna).

Sunto. - *Si richiama una formula da cui discende l'identità stabilita da* F. CONFORTO *ed altre analoghe.*

Il NETTO ha stabilita l'identità [1]

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+q} + \binom{n}{r+2q} + \dots = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1}\left(2\cos\frac{k\pi}{q}\right)^n \cos\frac{k(n-2r)\pi}{q} \tag{1}$$

con $r < q$; da essa si ricava quella data da F. CONFORTO nella precedente Nota ed altre analoghe.

Se nella (1) si pone $n = 2s + q$, ed r eguale al resto della divisione di s per q, il primo membro diviene il doppio di

$$\binom{2s+q}{s} + \binom{2s+q}{s-q} + \binom{2s+q}{s-2q} + \dots$$

e dall'essere $r = s - qE\left(\frac{s}{q}\right)$, ne risulta

$$\cos\frac{k(n-2r)\pi}{q} = \cos\left[\left\{2E\left(\frac{s}{q}\right) + 1\right\} k\pi\right] = (-1)^k,$$

perciò si ottiene

$$\binom{2s+q}{s} + \binom{2s+q}{s-q} + \binom{2s+q}{s-2q} + \dots = \tag{2}$$

$$= \frac{2^{2s+q-1}}{q}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{E\left(\frac{q-1}{2}\right)} (-1)^k \cos^{2s+q}\frac{k\pi}{q}\right].$$

[1] E. NETTO, *Lehrbuch der Combinatorik*, Leipzig 1901, pag. 20.

Se nella (2) si fa $q=2$, si ha la ben nota identità

$$\binom{2s+2}{s}+\binom{2s+2}{s-2}+\binom{2s+2}{s-4}+\ldots=2^{2s};$$

se si fa $q=3$, si ha

$$\binom{2s+3}{s}+\binom{2s+3}{s-3}+\binom{2s+3}{s-6}+\ldots=\frac{1}{3}(2^{2s+2}-1);$$

se si fa $q=4$, si ha

$$\binom{2s+4}{s}+\binom{2s+4}{s-4}+\binom{2s+4}{s-8}+\ldots=2^{s}(2^{s+1}-1)$$

la quale, col porre $s=p-1$, coincide con l'identità dimostrata dal CONFORTO; se si fa $q=6$, si ha

$$\binom{2s+6}{s}+\binom{2s+6}{s-6}+\binom{2s+6}{s-12}+\ldots=\frac{1}{6}[2^{2s+5}-3^{s+3}+1].$$