

---

# BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

PIERO BUZANO

## Tipi notevoli di 5-tessuti di curve piane

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2,*  
Vol. 1 (1939), n.1, p. 7–11.

Unione Matematica Italiana

<[http://www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_1939\\_2\\_1\\_1\\_7\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_1_7_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

*SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione  
Matematica Italiana, 1939.

## Tipi notevoli di 5-tessuti di curve piane.

Nota di PIERO BUZANO (a Torino).

**Sunto.** - Partendo da due 5-tessuti A) e B), incontrati in un precedente lavoro, che godono di una certa proprietà relativa alle terne esagonali, ricerco i più generali 5-tessuti che godono di essa. Aggiungendo poi un'ulteriore ed analoga proprietà trovo che, a prescindere da un caso ovvio, l'unica soluzione è costituita dal tessuto B).

1. In un mio recente lavoro <sup>(1)</sup> ho incontrato due notevoli 5-tessuti di curve piane <sup>(2)</sup> che chiamo A) e B) e che ammettono rappresentazioni analitiche dei seguenti tipi:

$$\begin{aligned} \text{A) } \left\{ \begin{array}{lll} \text{I) } x = \text{cost.}; & \text{II) } y = \text{cost.}; & \text{III) } \frac{e^y + \lambda e^{-y}}{e^x + \lambda e^{-x}} = \text{cost.}; \\ & & \text{IV) } x + y = \text{cost.}; & \text{V) } x - y = \text{cost.} \end{array} \right. \\ \text{B) } \left\{ \begin{array}{lll} \text{I) } x = \text{cost.}; & \text{II) } y = \text{cost.}; & \text{III) } \frac{e^y + \lambda e^{-y}}{e^x} = \text{cost.}; \\ & & \text{IV) } x + y = \text{cost.}; & \text{V) } x - y = \text{cost.} \end{array} \right. \end{aligned}$$

dove  $\lambda$  è una costante non nulla che mediante un cambiamento (reale) di variabili si può ridurre a  $\pm 1$ , senza alterare le equazioni degli altri sistemi <sup>(3)</sup>; nel lavoro citato è considerato solo il caso  $\lambda = 1$ . I tessuti A) e B) godono della proprietà di contenere un 4-tessuto rappresentabile su 4 fasci impropri di rette <sup>(4)</sup>, formato dai sistemi I) II) IV) V), mentre il rimanente sistema III) forma terna esagonale sia con I)-II) che con IV)-V). Essi però non sono i soli 5-tessuti a godere di tale proprietà: si hanno facilmente altri esempi sostituendo il sistema III) con un fascio

<sup>(1)</sup> Determinazione e studio di superficie di  $S_3$ , le cui linee principali presentano una notevole particolarità, « Annali di Matematica », fasc. I-II, 1939.

<sup>(2)</sup> Per notizie sull'argomento si veda la recente opera di W. BLASCHKE e G. BOL., *Geometrie der Gewebe*, Berlin, Springer, 1938.

<sup>(3)</sup> Infatti se  $\lambda > 0$  basta porre  $\lambda = e^{2\mu}$  e poi  $x' = x - \mu$ ,  $y' = y - \mu$ ; analogamente se  $\lambda < 0$  ponendo  $\lambda = -e^{2\mu}$ .

<sup>(4)</sup> Trattasi dunque di uno di quei 4-tessuti che la Scuola di Amburgo chiama « Sechseckgeflechte » e che appartiene al tipo  $\alpha$ ) secondo la classificazione del MAYRHOFER (T. 3: *Kurvensysteme auf Flächen*, « Math. Zeitschr. », 28 (1928)).

di rette proprio o improprio, o con un fascio di coniche bitangenti nei centri dei fasci I)-II) oppure IV)-V). Mi propongo quindi di *ricercare tutti i 5-tessuti che godono della proprietà indicata, riconducendone la determinazione all'esecuzione di sole quadrature. La classe delle soluzioni risulterà notevolmente vasta, ottenendosi i tessuti A) e B) solo con forti particolarizzazioni delle costanti d'integrazione. Ma se si chiede in più che il sistema III) formi terna esagonale con una 3<sup>a</sup> coppia estratta da I), II), IV), V), che si può supporre sia la II)-IV)*, allora prescindendo dai tessuti costituiti interamente da fasci di rette, vedremo che *tutte le soluzioni sono topologicamente identiche al tessuto B)*.

2. Supponiamo che nei 5-tessuti da determinare i sistemi I) II) IV) V) siano già ridotti alle forme  $x = \text{cost.}$ ,  $y = \text{cost.}$ ,  $x + y = \text{cost.}$ ,  $x - y = \text{cost.}$  e indichiamo con:

$$(1) \quad f(x, y) = \text{cost.}$$

l'equazione del sistema III) incognito. Perchè esso formi terna esagonale con I)-II) deve essere com'è noto <sup>(5)</sup>:

$$(2) \quad (\lg f_x - \lg f_y)_{xy} = 0,$$

ossia la  $f(x, y)$  deve ottenersi integrando l'equazione:

$$(3) \quad \psi(y) \cdot f_x - \varphi(x) \cdot f_y = 0,$$

dove  $\varphi(x)$  e  $\psi(y)$  sono per ora arbitrarie ma non nulle e diverse in valore assoluto <sup>(6)</sup>. Se il sistema (1) deve formare terna esagonale con IV)-V) deve esser verificata anche l'equazione che si ottiene dalla (2) cambiando  $x$  in  $x + y$  e  $y$  in  $y - x$ , ossia:

$$[\lg(f_x - f_y) - \lg(f_x + f_y)]_{xx} - [\lg(f_x - f_y) - \lg(f_x + f_y)]_{yy} = 0.$$

Poichè quest'equazione è omogenea in  $f_x$  e  $f_y$ , tenuta presente la (3), possiamo sostituire  $f_x$  e  $f_y$  rispettivamente con  $\varphi(x)$  e  $\psi(y)$ , ottenendo così un'equazione che a calcoli effettuati assume la

<sup>(5)</sup> Cfr. G. THOMSEN, *Un teorema topologico sulle schiere di curve e una caratterizzazione geometrica delle superficie isotermo-asintotiche*, » Boll. U. M. I. », VI (1927), p. 80.

<sup>(6)</sup> Se fosse  $\varphi(x) = \pm \psi(y)$  vi sarebbe una costante  $c$  per cui  $\varphi(x) = c$ ,  $\psi(y) = \pm c$  e l'integrale della (3) sarebbe  $f(x \pm y)$ , ossia il sistema cercato coinciderebbe con uno degli altri quattro; lo stesso se fosse  $\varphi(x) \equiv 0$  o  $\psi(y) \equiv 0$ .

forma seguente (7):

$$(4) \quad W \equiv \frac{\varphi''}{\varphi} + \frac{\psi''}{\psi} - 2 \frac{\varphi'^2 - \psi'^2}{\varphi^2 - \psi^2} = 0.$$

Supponiamo:

$$(5) \quad \varphi'(x) \equiv 0, \quad \psi'(y) \equiv 0$$

riservandoci di esaminare poi i casi eccezionali. Allora dalla (4) segue:

$$\frac{1}{\varphi\varphi'} \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{1}{\psi\psi'} \frac{\partial W}{\partial y} = 0$$

e a quest'equazione si può dare con opportuni accorgimenti la forma seguente:

$$\frac{1}{\varphi\varphi'} \frac{d}{dx} \left( \frac{\varphi''}{\varphi} \right) - \frac{1}{\psi\psi'} \frac{d}{dy} \left( \frac{\psi''}{\psi} \right) - \frac{4}{\varphi^2 - \psi^2} W = 0$$

ma per la (4) si annulla  $W$  e quindi:

$$\frac{1}{\varphi\varphi'} \frac{d}{dx} \left( \frac{\varphi''}{\varphi} \right) = \frac{1}{\psi\psi'} \frac{d}{dy} \left( \frac{\psi''}{\psi} \right) = \text{cost.}$$

Di qui si ricava:

$$(6) \quad \varphi'^2 = c_0\varphi^4 + c_1\varphi^2 + c_2; \quad \psi'^2 = c_0\psi^4 + c_1\psi^2 + c_2$$

dove le costanti arbitrarie  $c_0, c_1, c_2$  devono esser le stesse sia per  $\varphi'$  che per  $\psi'$  se si vuole che la (4) sia effettivamente soddisfatta (8). La più generale soluzione è dunque ottenibile per quadrature attraverso le equazioni (6) e (3) (9). La soluzione A) corrisponde al caso particolarissimo in cui  $c_0 = c_2 = 1, c_1 = -2$ . Invece si potrebbe verificare che la soluzione B), nella forma indicata, non è ottenibile dalle (6): vedremo infatti che essa corrisponde proprio al caso eccezionale in cui non è soddisfatta l'ipotesi (5).

3. Lasciando da parte il caso ovvio in cui  $\varphi'$  e  $\psi'$  sono entrambe nulle identicamente (caso che conduce a un fascio improprio di rette e che d'altronde si può far rientrare nelle (6) per annullamento di tutte le costanti), esaminiamo il caso in cui è per es.:

$$\varphi'(x) \equiv 0, \quad \psi'(x) \equiv 0.$$

(7) Ponendo  $\varphi' = \frac{d\varphi}{dx}, \psi' = \frac{d\psi}{dy}$  ecc..

(8) È necessario verificare che le (6) rendano soddisfatta la (4), poichè ad esse si è giunti utilizzando conseguenze differenziali della (4).

(9) Le (6) determinano subito le funzioni inverse  $x(\varphi), y(\psi)$ , in generale per mezzo di integrali ellittici.

Ponendo allora in (4)  $\varphi = c$  se ne ricava:

$$(7) \quad \varphi = c; \quad \psi' = \frac{k}{c} (\psi^2 - c^2),$$

dove  $k$  e  $c$  sono costanti arbitrarie non nulle. La (7) si integra subito e dà:

$$(8) \quad \varphi = c; \quad \psi = -c \frac{e^{ky} - \lambda e^{-ky}}{e^{ky} + \lambda e^{-ky}},$$

dove  $\lambda$  è una costante arbitraria. Sostituendo i valori (8) in (3) si ottiene che l'equazione (1) è del seguente tipo:

$$(9) \quad x - \frac{1}{k} \lg (e^{ky} + \lambda e^{-ky}) = \text{cost.}$$

Ci si può ridurre al caso  $k=1$  con il cambiamento  $x' = kx$ ,  $y' = ky$  che non altera i sistemi I) II) IV) V) e allora la (9) equivale all'equazione III<sup>B</sup>. Dunque il caso  $\varphi' \equiv 0$ ,  $\psi' \equiv 0$  conduce unicamente alla soluzione B). Analogamente il caso  $\varphi' \equiv 0$ ,  $\psi' \equiv 0$  condurrebbe a una soluzione ottenibile da B) con scambio di  $x$  e  $y$ , il che equivale a scambiare I) con II) mentre IV) e V) restano fissi.

4. Chiediamo infine che sia esagonale anche la terna II) III) IV): dovrà esser verificata anche l'equazione che si ottiene dalla (2) cambiando  $x$  in  $x - y$ , ossia:

$$[\lg f_x - \lg (f_y - f_x)]_{rx} - [\lg f_x - \lg (f_y - f_x)]_{ry} = 0,$$

che, sostituendo  $f_x$  e  $f_y$  con  $\varphi(x)$  e  $\psi(y)$ , diventa:

$$(10) \quad \left[ \frac{\varphi' \psi + \psi' \varphi}{\varphi(\psi - \varphi)} \right]_x = 0;$$

questa si può mettere sotto la forma:

$$(11) \quad \varphi \varphi'' - \varphi'^2 + \varphi \varphi' \frac{\varphi' \psi + \psi' \varphi}{\psi(\psi - \varphi)} = 0.$$

Le soluzioni richieste devono soddisfare sia (11) che (4). Per  $\varphi' \equiv 0$  la (11) è soddisfatta e la (4) ci dà la soluzione B) che infatti gode della proprietà richiesta. Sia ora  $\varphi' \equiv 0$ : la (11) si scrive:

$$\frac{\varphi \varphi'' - \varphi'^2}{\varphi^2 \varphi'} = -\frac{1}{\psi} \cdot \frac{\varphi' \psi + \psi' \varphi}{\varphi(\psi - \varphi)},$$

ma il 2° membro, tenuta presente la (10), è una funzione della sola  $y$ ; d'altro lato il 1° membro è funzione della sola  $x$ , quindi entrambi sono costanti:

$$(12) \quad \frac{\varphi \varphi'' - \varphi'^2}{\varphi^2 \varphi'} = h_0; \quad (13) \quad \frac{\varphi' \psi + \psi' \varphi}{\varphi \psi (\psi - \varphi)} = h_0.$$

Dalla (12) si ricava:

$$(14) \quad \varphi' = h_0 \varphi^2 + h_1 \varphi$$

e sostituendo in (13):

$$(15) \quad \psi' = -h_0 \psi^2 - h_1 \psi$$

dove  $h_0$  e  $h_1$  sono costanti arbitrarie non nulle (cosicché anche  $\psi' \neq 0$ ). Si tratta ora di stabilire se con (14) e (15) si può soddisfare anche alla (4), ossia alle (6): si vede subito che ciò avviene solo se:  $h_0^2 = c_0$ ,  $h_1 = c_1 = c_2 = 0$  oppure  $h_1^2 = c_1$ ,  $h_0 = c_0 = c_2 = 0$ . Restano quindi due soli casi possibili:

$$(16) \quad \begin{cases} \varphi' = h_0 \varphi^2 \\ \psi' = -h_0 \psi^2 \end{cases}$$

$$(17) \quad \begin{cases} \varphi' = h_1 \varphi \\ \psi' = -h_1 \psi \end{cases}$$

Si riconosce facilmente che le (16) conducono a un fascio (proprio) di rette: prescindendo quindi da tessuti costituiti interamente da fasci di rette non resta che il sistema (17). Questo integrato dà:

$$\varphi = pe^{h_1 x}, \quad \psi = qe^{-h_1 y},$$

cosicché, tenuta presente la (3), l'equazione (1) assume ora la seguente forma:

$$(18) \quad e^{h_1 x} + \lambda e^{-h_1 y} = \text{cost.}$$

dove  $\lambda$  è una costante arbitraria. Eseguiamo la trasformazione:

$$(19) \quad x = \frac{1}{h_1} (y' - x'), \quad y = \frac{1}{h_1} (x' + y')$$

ed il sistema (18) diventa:

$$e^{-x'} (e^{y'} + \lambda e^{-y'}) = \text{cost.}$$

ossia viene a coincidere con il sistema III<sup>B</sup>. Notiamo inoltre che la trasformazione (19) è perfettamente lecita perchè scambia la coppia I)-II) con la V)-IV) e muta in sè la coppia II)-IV) (scambiando II) con IV)).

Resta così dimostrato che prescindendo dai tessuti di fasci di rette, il tessuto B) è il modello più generale di 5-tessuto contenente un 4-tessuto I)-II)-IV)-V) rappresentabile su 4 fasci impropri di rette e possedente le terne esagonali I)-II)-III), III)-IV)-V), II)-III)-IV). In tale 5-tessuto risulta di conseguenza esagonale anche la terna II)-III)-V), cosicché esso viene a contenere un secondo 4-tessuto II)-III)-IV)-V) rappresentabile anch'esso su 4 fasci di rette <sup>(10)</sup>.

(10) Perchè le sue terne sono tutte esagonali: però solo 3 dei fasci possono essere impropri (cfr. il mio lavoro citato); il tessuto appartiene perciò al tipo  $\beta$ ) di MAYRHOFER.