Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Fabio Conforto

Un'identità aritmetica che si presenta nella geometria algebrica

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2, Vol. **1** (1939), n.1, p. 75–80.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_1_75_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1939.

Un' identità aritmetica che si presenta nella geometria algebrica.

Nota di F. CONFORTO (a Roma).

Sunto. - *Su una curva, una serie autoresidua rispetto alla serie canonica assorbe zero od un gruppo semicanonico a seconda che la sua dimensione sia dispari o pari. D'altronde su una curva iperellittica si possono enumerare tutte le serie autoresidue. Tenuto conto del numero dei gruppi semicanonici sopra una curva generica si perviene così ad una identità aritmetica, della quale si dà una dimostrazione elementare.*

Considerando il problema della bisezione della serie canonica sopra una curva iperellittica mi sono imbattuto nella identità aritmetica seguente:

$$2^{p-1}(2^p-1)=\binom{2p+2}{p-1}+\binom{2p+2}{p-5}+\binom{2p+2}{p-9}+\dots,$$

nella quale p è un intero qualunque ≥ 2 e dove l'ultimo addendo della somma è:

$$\binom{2p+2}{0} \quad \text{o} \quad \binom{2p+2}{1} \quad \text{o} \quad \binom{2p+2}{2} \quad \text{o} \quad \binom{2p+2}{3}$$

a seconda che $p-1$ sia della forma

$$4k \quad \text{o} \quad 4k+1 \quad \text{o} \quad 4k+2 \quad \text{o} \quad 4k+3.$$

Un' identità di questo tipo si deve implicitamente ritenere come nota, anche se — come sembra — essa non sia mai stata scritta esplicitamente. Crediamo tuttavia non del tutto privo d'interesse l'esporre il legame dell'identità soprascritta con l'accennato problema geometrico. A ciò è dedicato il n. 1 di questa Nota; nel n. 2 offriamo una semplice dimostrazione della stessa identità, ottenuta con i mezzi dell'algebra elementare.

1. Il problema della bisezione della serie canonica [1] sopra una curva C di genere p (≥ 2) consiste nel determinare quei gruppi di $p-1$ punti (gruppi semicanonici), che, *contati due volte*, appartengono alla serie canonica g_{2p-2}^{p-1} della C. Più precisamente si trova che un gruppo semicanonico è dato dalle radici (diverse dall'origine degli integrali abeliani normali di prima specie) della equazione:

$$\theta_{\tau\mu} = 0$$

ove $\theta_{\tau\mu}$ è una θ qualsiasi a caratteristica *dispari*. Se la curva C è a moduli generali non vi sono altre soluzioni è si hanno così tanti gruppi semicanonici isolati quante sono le caratteristiche dispari, cioè $2^{p-1}(2^p-1)$. Se invece la curva C è a moduli *particolari* possono presentarsi delle intere serie lineari costituite da gruppi semicanonici (serie autoresidue rispetto alla serie canonica); ed allora si trova, come facile conseguenza della teoria delle funzioni θ, che una g_{p-1}^r autoresidua *completa* assorbe zero od una delle $2^{p-1}(2^p-1)$ soluzioni, che si hanno in generale, a seconda che r sia dispari o pari.

Ciò premesso supponiamo che la C, di genere p, sia *iperellittica*; ed immaginiamola ad esempio realizzata mediante la curva d'equazione $y^2 = f_{2p+2}(x)$ dove f è un polinomio nella x di grado $2p+2$ ed a radici *distinte*. La g_2^1 esistente sulla C è segata dalle parallele all'asse y e la serie canonica g_{2p-2}^{p-1}, che è composta con la g_2^1, è segata dagli ∞^{p-1} gruppi di $p-1$ parallele all'asse y; inoltre i punti doppi della g_2^1 sono dati dalle $2p+2$ radici dell'equazione $f_{2p+2}(x) = 0$ (punti di diramazione della retta doppia, a cui si riduce la C proiettandola sull'asse x dal punto all'infinito dell'asse y).

È ora facile enumerare tutte le serie autoresidue complete appartenenti alla C. Invero un gruppo semicanonico della C può essere costituito da $p-1$ punti doppi della g_2^1, ovvero da $p-3$ punti doppi della g_2^1 completati con un gruppo generico della g_2^1, ovvero da $p-5$ punti doppi della g_2^1 completati con due gruppi

(1) Per i concetti qui richiamati e per la dimostrazione delle proprietà che qui ricordiamo cfr. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche* (Bologna 1934), Vol. IV, Lib. VI, Cap. III, pagg. 203-212. Per il caso della curva iperellittica, che interessa più avanti, cfr. anche nella *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, II, B, 7, l'articolo di A. KRAZER e W. WIRTINGER: *Abelsche Funktionen und allgemeine Thetafunktionen*, n. 76, pag. 764.

generici della g^1_2 e così via. Si hanno così le seguenti serie complete, costituite da gruppi semicanonici:

le $\binom{2p+2}{p-1} g^0_{p-1}$ costituite da $p-1$ punti doppi della g^1_2;

le $\binom{2p+2}{p-3} g^1_{p-1}$ i cui gruppi constano di $p-3$ punti doppi della g^1_2 fissi e di un gruppo generico della g^1_2;

le $\binom{2p+2}{p-5} g^2_{p-1}$ i cui gruppi constano di $p-5$ punti doppi della g^1_2 fissi e di due gruppi generici della g^1_2;

le $\binom{2p+2}{p-7} g^3_{p-1}$ i cui gruppi constano di $p-7$ punti doppi della g^1_2 fissi e di tre gruppi generici della g^1_2;

. . . .

le $\binom{2p+2}{p-2h-1} g^h_{p-1}$ i cui gruppi constano di $p-(2h+1)$ punti doppi della g^1_2 fissi e da h gruppi generici della g^1_2, essendo h il massimo intero contenuto in $\frac{p-1}{2}$.

Rammentando ora che una g^r_{p-1} autoresidua *completa* assorbe uno o zero dei $2^{p-1}(2^p-1)$ gruppi semicanonici isolati, che si hanno su una C a moduli generali, a seconda che r sia dispari o pari, dovrà essere:

$$2^{p-1}(2^p-1) = \binom{2p+2}{p-1} + \binom{2p+2}{p-5} + \binom{2p+2}{p-9} + \ldots;$$

e l'ultimo dei coefficienti binomiali sarà precisamente

$$\binom{2p+2}{0} \quad \text{o} \quad \binom{2p+2}{1} \quad \text{o} \quad \binom{2p+2}{2} \quad \text{o} \quad \binom{2p+2}{3}$$

a seconda che $p-1$ abbia la forma

$$4k \quad \text{o} \quad 4k+1 \quad \text{o} \quad 4k+2 \quad \text{o} \quad 4k+3.$$

Si vede così come la identità aritmetica soprascritta sia legata al problema della bisezione della serie canonica sopra una curva iperellittica di genere $p \geq 2$.

2. Proponiamoci ora di dimostrare elementarmente la nostra identità aritmetica.

Supponiamo da prima p dispari: $p = 2h + 1$. Allora l'identità da dimostrare diviene:

$$(1) \qquad 2^{2h}(2^{2h+1} - 1) = \binom{4h+4}{2h} + \binom{4h+4}{2h-4} + \binom{4h+4}{2h-8} + \ldots$$

dove l'ultimo coefficiente binomiale è

$$\binom{4h+4}{0} \quad \text{o} \quad \binom{4h+4}{2}$$

secondo che h è pari o dispari.

Applicando la formula del binomio allo sviluppo di $(1+1)^{4h+4}$ si ottiene la nota formula:

$$2^{4h+4} = \binom{4h+4}{0} + \binom{4h+4}{1} + \binom{4h+4}{2} + \ldots + \binom{4h+4}{4h+4},$$

che, per la notissima relazione:

$$\binom{n}{h} = \binom{n}{n-h}$$

diviene:

$$(2) \quad 2^{4h+4} = 2\left[\binom{4h+4}{0} + \binom{4h+4}{1} + \binom{4h+4}{2} + \ldots + \binom{4h+4}{2h+1}\right] + \binom{4h+4}{2h+2}.$$

Sviluppando invece $(1-1)^{4h+4}$ otteniamo:

$$(3) \quad 0 = 2\left[\binom{4h+4}{0} - \binom{4h+4}{1} + \binom{4h+4}{2} - \ldots - \binom{4h+4}{2h+1}\right] + \binom{4h+4}{2h+2};$$

e sommando la (3) alla (2):

$$(4) \quad 2^{4h+4} = 4\left[\binom{4h+4}{0} + \binom{4h+4}{2} + \binom{4h+4}{4} + \ldots + \binom{4h+4}{2h}\right] + 2\binom{4h+4}{2h+2}.$$

Ciò posto, denotando con i l'unità immaginaria, sarà:

$$(1+i)^{4h+4} = [(1+i)^2]^{2h+2} = (2i)^{2h+2} = (-1)^{h+1} \cdot 2^{2h+2},$$

e quindi, sviluppando $(1+i)^{4h+4}$ secondo la formula del binomio ed uguagliando le parti reali:

$$(-1)^{h+1} \cdot 2^{2h+2} = \binom{4h+4}{0} - \binom{4h+4}{2} + \binom{4h+4}{4} - \ldots + \binom{4h+4}{4h+4} =$$

$$= 2\left[\binom{4h+4}{0} - \binom{4h+4}{2} + \binom{4h+4}{4} - \ldots + (-1)^h \binom{4h+4}{2h}\right] + (-1)^{h+1}\binom{4h+4}{2h+2},$$

ed anche:

$$(5)\qquad (-1)^{h+1}\cdot 2^{2h+3} = 4\left[\binom{4h+4}{0} - \binom{4h+4}{2} + \right.$$

$$\left. + \binom{4h+4}{4} - \ldots + (-1)^h \binom{4h+4}{2h}\right] + 2(-1)^{h+1}\binom{4h+4}{2h+2}$$

Se ora h è dispari sottragghiamo la (5) dalla (4) ed otteniamo:

$$2^{2h}(2^{2h+1}-1) = \binom{4h+4}{2} + \binom{4h+4}{6} + \binom{4h+4}{10} + \ldots + \binom{4h+4}{2h}.$$

Se invece h è pari sommiamo la (5) alla (4) ed otteniamo:

$$2^{2h}(2^{2h+1}-1) = \binom{4h+4}{0} + \binom{4h+4}{4} + \binom{4h+4}{8} + \ldots + \binom{4h+4}{2h}.$$

Riesce così dimostrata l'identità (1) e quindi la nostra identità nell'ipotesi che p sia un numero dispari.

Una dimostrazione analoga vale se p è pari: $p = 2h$. L'identità da dimostrare diviene allora:

$$(1')\qquad 2^{2h-1}(2^{2h}-1) = \binom{4h+2}{2h-1} + \binom{4h+2}{2h-5} + \binom{4h+2}{2h-9} + \ldots$$

dove l'ultimo coefficiente binomiale è

$$\binom{4h+2}{1} \quad \text{o} \quad \binom{4h+2}{3}$$

a seconda che h è dispari o pari.

Sviluppando con la formula del binomio $(1+1)^{4h+2}$ e $(1-1)^{4h+2}$ e sottraendo una formula dall'altra, otteniamo:

$$(4')\quad 2^{4h+2} = 4\left[\binom{4h+2}{1} + \binom{4h+2}{3} + \binom{4h+2}{5} + \ldots + \binom{4h+2}{2h-1}\right] + 2\binom{4h+2}{2h+1}.$$

D'altra parte è:

$$(1+i)^{4h+2} = [(1+i)^2]^{2h+1} = (2i)^{2h+1} = (-1)^h\cdot 2^{2h+1}\cdot i;$$

ma, sviluppando con la formula del binomio ed uguagliando le parti immaginarie viene:

$$(5')\qquad (-1)^h 2^{2h+2} = 4\left[\binom{4h+2}{1} - \binom{4h+2}{3} + \right.$$

$$\left. + \binom{4h+2}{5} - \ldots + (-1)^{h-1}\binom{4h+2}{2h-1}\right] + 2(-1)^h\binom{4h+2}{2h+1}.$$

Se ora h è dispari, sommando le (4′) e (5′) si perviene all'identità:

$$2^{2h-1}(2^{2h}-1)=\binom{4h+2}{1}+\binom{4h+2}{5}+\binom{4h+2}{9}+\ldots+\binom{4h+2}{2h-1}.$$

Se invece h è pari, sottraendo la (5′) dalla (4′) si ha:

$$2^{2h-1}(2^{2h}-1)=\binom{4h+2}{3}+\binom{4h+2}{7}+\binom{4h+2}{11}+\ldots+\binom{4h+2}{2h-1}.$$

Rimane così dimostrata la identità (1′) e quindi l'identità che ci interessa anche nel caso che sia p un numero pari.

L'identità scritta al principio di questa Nota rimane così dimostrata in ogni caso.