
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ENRICO BOMPIANI

Una esposizione elementare della teoria delle coniche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2,
Vol. 1 (1939), n.1, p. 60–72.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_1_60_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Una esposizione elementare della teoria delle coniche.

Nota di ENRICO BOMPIANI (a Roma).

Sunto. - *Le coniche vengono introdotte generalmente con una delle seguenti definizioni: 1) per mezzo di proprietà di distanze dei loro punti da due punti fissi o da un punto e da una retta; 2) come sezioni del cono rotondo; 3) come proiezioni di cerchi; 4) come curve generate da fasci proiettivi. Si mostra con mezzi elementari di carattere sintetico l'equivalenza delle varie definizioni.*

1. Alcune definizioni delle coniche. — La teoria delle coniche può considerarsi da diversi punti di vista a seconda della definizione che per esse si assume. Ciascuna definizione può, secondo il fine che ci si propone, avere vantaggi sulle altre; una teoria delle coniche nasce soltanto quando si mostri l'equivalenza delle varie definizioni.

Se si prescinde dalla definizione analitica, che presuppone l'uso (quindi la conoscenza) delle coordinate cartesiane, estranee all'ente geometrico da studiare, le definizioni abituali delle coniche sono dei quattro tipi seguenti:

- I. Definizione delle coniche per mezzo di distanze.
- II. Definizione delle coniche come sezioni del cono rotondo.
- III. Definizione delle coniche come proiezioni di cerchi.
- IV. Definizione mediante fasci proiettivi.

Quanto al primo tipo di definizione (mediante i fuochi per le coniche a centro, o mediante un fuoco e la relativa direttrice per i tre tipi di coniche) nulla c'è da dire che non sia noto.

Sono pure di carattere elementare, e notissime, le costruzioni di DANDELIN che permettono di identificare le sezioni piane dei

coni rotondi con le coniche della precedente definizione. Per esse si fa vedere che le sezioni piane di un cono rotondo godono delle proprietà metriche della def. I; e viceversa che presa una conica secondo la def. I e costruita la conica focale di essa ⁽¹⁾ questa è luogo dei vertici di coni rotondi proiettanti la conica data. O in altri termini che ogni conica può considerarsi (in infiniti modi) come proiezione di un cerchio: uno qualsiasi di quelli appartenenti ad uno dei coni ora detti, proiettato dal vertice del cono; cioè il centro di proiezione appartiene all'asse ⁽²⁾ del cerchio che si proietta nella conica.

È bene rilevare subito che i cerchi ora detti *non* sono i soli dai quali la conica data può ottenersi per proiezione (appunto a causa della limitazione ora messa in evidenza circa la posizione del vertice del cono proiettante).

Meno immediata è la dimostrazione dell'equivalenza delle definizioni III e IV con le due precedenti, quando ci si limiti, s'intende, a mezzi del tutto elementari: e precisamente qui si vuol far uso esclusivamente dell'invarianza del birapporto per operazioni di proiezione e sezione e della definizione di proiettività (tra forme di 1^a specie) mediante uguaglianze di birapporti.

2. Alcune costruzioni di coniche. -- Comincio col dare alcune costruzioni di coniche derivanti dall'equivalenza delle def. I e II: costruzioni che occorreranno per il seguito.

a) Costruzione di un'ellisse dati i vertici principali (sull'asse focale) A, A' e un punto P .

Il punto P è necessariamente interno al cerchio di diametro AA' .

Nel piano dell'iperbole focale dell'ellisse da costruire si conduca la perpendicolare in A alla AA' : sia V un punto di essa appartenente all'iperbole, quindi vertice di un cono rotondo per l'ellisse. L'angolo VAA' è retto

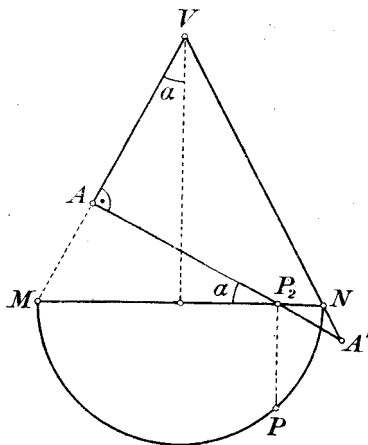


Fig. 1

⁽¹⁾ Essa sta nel piano perpendicolare a quello della conica data passante per l'asse focale; i vertici principali (sull'asse focale) dell'una sono fuochi dell'altra.

⁽²⁾ Perpendicolare al piano del cerchio nel centro di questo.

per costruzione. Si seghi il cono con il piano perpendicolare al suo asse per P e si ribalti il cerchio sezione, di diametro MN , sul piano VAA' dell'iperbole.

Con le notazioni in fig. 1 si ha:

$$\overline{P_2P}^2 = MP_2 \cdot P_2N = \frac{AP_2}{\cos \alpha} \cdot P_2N.$$

Dal teorema dei seni applicato al triangolo P_2NA' , con gli angoli $A'P_2N = \alpha$, $NA'P_2 = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$, $P_2NA' = \frac{\pi}{2} + \alpha$, si ha

$$P_2N = PA' \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha}$$

quindi sostituendo nella precedente

$$\overline{P_2P}^2 = AP_2 \cdot P_2A' \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha} = AP_2 \cdot P_2A' (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha).$$

Questa relazione determina α . Per metterla in forma più comoda osserviamo che costruito sull'asse AA' come diametro il

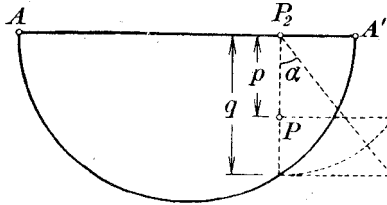


Fig. 2

cerchio, e indicata la lunghezza della corda perpendicolare ad AA' per P (e per P_2) con $2q$, si ha $AP_2 \cdot P_2A' = q^2$; posto poi $P_2P = p < q$ l'ultima relazione dà

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{q^2 - p^2}{q^2}$$

dalla quale si ricava una costruzione geometrica immediata (fig. 2) di α , mediante elementi noti.

Trovato α si può ricostruire il triangolo rettangolo VAA' , di cui un cateto è AA' e l'angolo opposto è 2α ; il cerchio inscritto in esso tocca (per le costruzioni di DANDELIN) il lato AA' in un fuoco F ; e avuti i fuochi siamo ricondotti alla defin. I.

b) Costruzione di un'iperbole dati i vertici A , A' e un punto P .

Il punto P è necessariamente esterno alla striscia limitata dalle perpendicolari per A e A' alla AA' ; cioè P_2 , piede della perpendicolare da P su AA' , è esterno al segmento AA' . Posto $P_2P = p$ e indicato con q il segmento di tangente da P_2 alla

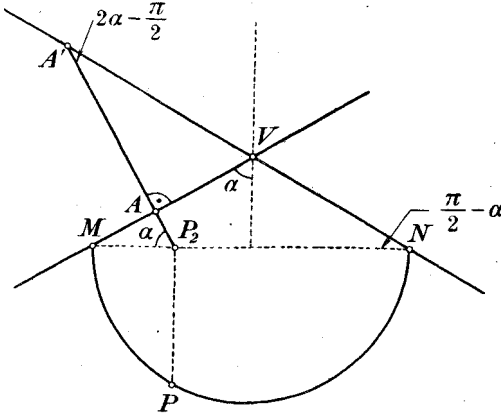


Fig. 3

circonferenza di diametro AA' , con ragionamento analogo al precedente e con le notazioni in fig. 3 si ha

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{p^2 + q^2}{q^2}$$

da cui si ricava α con immediata costruzione (fig. 4), quindi V come vertice di un triangolo rettangolo (in A), di cui un cateto

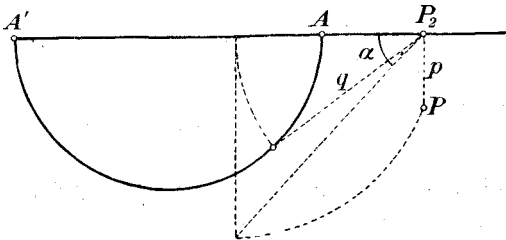


Fig. 4

è AA' e l'angolo opposto vale $\pi - 2\alpha$. Il cerchio ex-inscritto al triangolo VAA' (tangente al lato VA) tocca il prolungamento di AA' in un fuoco F . Si è ricondotti alla def. I.

c) Costruzione di una parabola, dati il vertice A , l'asse e un punto P .

d'intersezione delle congiungenti i punti di contatto di due lati con il lato rimanente stanno su una retta (di PASCAL);

teorema che risulta immediatamente da quello di MENELAO.

III. Se da due punti di una circonferenza si proietta un punto variabile su di essa si ottengono due fasci direttamente uguali; viceversa il luogo dei punti d'intersezione di rette corrispondenti di due fasci direttamente uguali (non sovrapposti) è una circonferenza passante per i centri dei due fasci. Le tangenti in essi sono le rette che in ciascun fascio corrispondono alla congiungente i centri.

È conseguenza immediata del fatto che gli angoli alla circonferenza che insistono su uno stesso arco di essa sono uguali.

IV. Una tangente variabile di una circonferenza sega due tangenti fissate (qualsiasi) di essa in punteggiate proiettive.

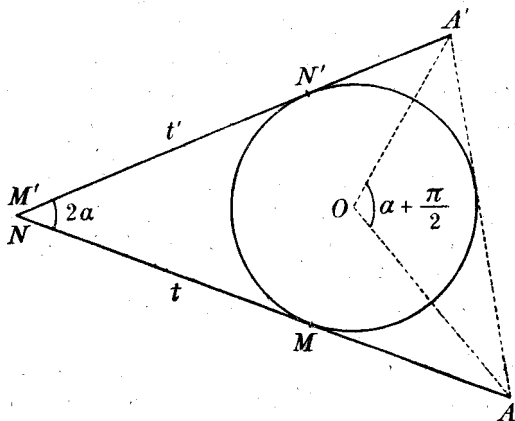


Fig. 7

Il punto di contatto di ciascuna di queste corrisponde al loro punto d'intersezione considerato sull'altra.

Con le notazioni in fig. 7 ove t, t' sono le tangenti fissate formanti l'angolo 2α e AA' una tangente variabile, ciò risulta dal fatto che l'angolo AOA' è sempre uguale ad $\alpha + \pi/2$; quindi le due punteggiate descritte da A e da A' risultano sezioni di due fasci uguali e sono perciò proiettive.

4. Le curve proiezioni di una circonferenza. — Le proprietà ricordate della circonferenza ci danno subito, quando si tenga conto dell'invarianza per operazioni di proiezione e di sezione delle condizioni d'appartenenza e dei birapporti, le se-

guenti proprietà delle curve che si possono ottenere come proiezioni di circonferenze (da un punto qualsiasi dello spazio).

Per una curva proiezione di una circonferenza:

I. *in un triangolo ad essa circoscritto le congiungenti i vertici con i punti di contatto dei lati opposti passano per un punto (di Brianchon);*

II. *e le congiungenti coppie di punti di contatto segano i lati rimanenti in punti di una retta (di Pascal);*

III. *se da due punti fissati ad arbitrio sulla curva si proietta un punto variabile di essa si ottengono due fasci riferiti proiettivamente: alla congiungente i due punti fissi, centri dei fasci, considerata in un fascio, corrisponde la tangente nel centro dell'altro;*

IV. *se si tagliano due tangenti fisse della curva con una variabile questa determina su quelle due punteggiate proiettive; il punto di contatto di ciascuna delle tangenti fissate corrisponde sull'altra al loro punto d'intersezione.*

Queste proprietà appartengono alle coniche sezioni del cono rotondo (def. II), proiezioni di una circonferenza da un punto del suo asse, e quindi anche alle coniche secondo la def. I.

5. Curve generate da fasci proiettivi. — Con ciò non è ancora dimostrata l'equivalenza delle def. I e II con le def. III e IV; ma è soltanto provato che le curve rispondenti a queste varie definizioni hanno alcune proprietà comuni.

Per raggiungere lo scopo occorre invertire il teor. III ora stabilito.

Consideriamo perciò due fasci di rette, complanari, proiettivi, ma non prospettivi, di centri R, S . Determiniamo la proiettività dando le rette corrispondenti alla RS , r per R , s per S , e inoltre le rette corrispondenti $SA \equiv a$, $RA \equiv a'$.

Vogliamo stabilire che:

Il luogo del punto d'intersezione di rette corrispondenti nei due fasci proiettivi (non prospettivi) può considerarsi (in infiniti modi) come proiezione di una circonferenza.

Ciò fatto sarà provata l'equivalenza delle def. III e IV.

Poichè i fasci non sono prospettivi è $r \neq s$.

Si consideri il punto $U \equiv r \cdot s$ e in un piano α ad arbitrio per s (diverso dal piano $\pi \equiv rs$) si prenda una circonferenza tangente in S ad s ; e sia T il punto di contatto della tangente $\neq s$ alla circonferenza condotta da U .

Il piano $\alpha' T \equiv RAT$ taglia (α in una retta e quindi) la circonferenza in un punto $A' \neq T$ (per l'arbitrarietà del piano e della circonferenza); si determini il punto $V \equiv RT \cdot AA'$.

I due fasci uguali di centri S, T che generano la circonferenza si proiettano, da V su π , in due fasci proiettivi: la retta RS , proiezione di TS , ha per corrispondenti nei due fasci le rette r, s (proiezioni di UT ed s); e inoltre si corrispondono le rette $a \equiv SA, a' \equiv RA$ (proiezioni di SA, TA'). Sicchè la proiettività fra i due fasci di centri R, S ottenuta per proiezione è proprio quella data: quindi la curva luogo del punto d'intersezione di rette corrispondenti nei due fasci proiettivi dati è proiezione da V della circonferenza considerata.

Il teorema è così provato; le rette r ed s sono rispettivamente tangenti in R, S alla curva; e di questa si può senz'altro dire che è di 2° ordine e di 2ª classe, etc.

Ma di più, poichè la circonferenza può generarsi mediante fasci proiettivi (uguali) aventi i centri in due suoi punti qualsiasi, segue:

La curva generata da due fasci proiettivi di centri R, S ha per tangenti in essi le rette che nella proiettività corrispondono alla RS . La stessa curva può generarsi con fasci proiettivi aventi per centri due suoi punti qualsiasi (rette corrispondenti nei due fasci sono sempre quelle incidenti in un punto della curva).

Essendo provata l'equivalenza della def. III e IV per le curve generate da fasci proiettivi valgono i teoremi I, II, IV del n. 4 (il teor. III ci è servito di punto di partenza).

Rimane dunque da provare l'equivalenza delle def. I, II con le def. III, IV; cioè p. es. che le curve generate da fasci proiettivi possono ottenersi come sezioni piane di coni rotondi.

6. Proprietà metriche delle curve generate da fasci proiettivi. — Riprendiamo a considerare la circonferenza del n. prec. e la sua tangente parallela ad s .

Il piano di V e di questa tangente può:

1) tagliare π in una retta s' , parallela ad s , che risulta tangente in un punto S' alla proiezione della circonferenza; allora

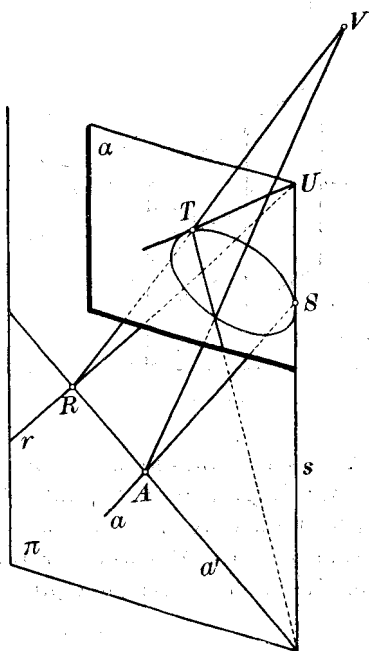


Fig. 8

la curva (per l'ultimo teorema del n. 5) può generarsi con fasci proiettivi di centri S, S' in modo che alla retta SS' corrispondano le rette s, s' ;

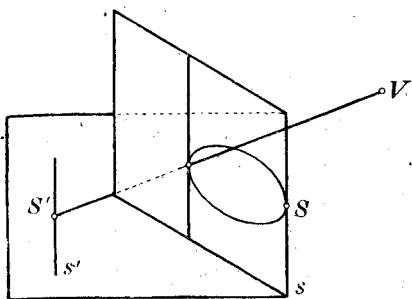


Fig. 9

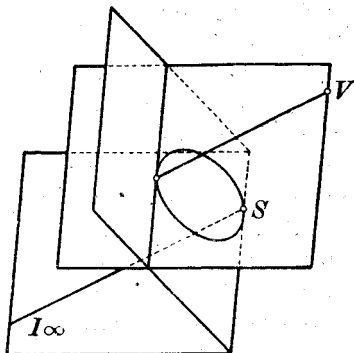


Fig. 10

2) esser parallelo a π ; cioè la curva proiezione è tangente alla retta impropria nel punto I_∞ proiezione da V del punto di contatto della tangente alla circonferenza parallela ad s .

Esaminiamo il 1° caso. Per finire di determinare la proiettività diamo due rette corrispondenti, a per S e a' per S' ; e sia x, x'

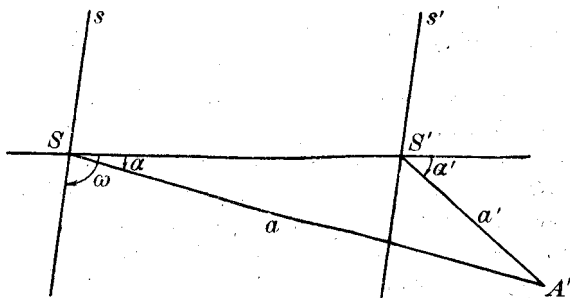


Fig. 11

un'altra qualsiasi coppia di rette corrispondenti nei due fasci. Si ha per definizione l'uguaglianza di birapporti:

$$(s, SS', a, x) = (SS', s', a', x')$$

cioè introdotti gli angoli come in fig. 11 (θ e θ' sono gli analoghi di α e α' per la coppia x, x')

$$\frac{\text{sen}(\omega - \alpha)}{\text{sen} \alpha} \frac{\text{sen} \theta}{\text{sen}(\omega - \theta)} = \frac{\text{sen} \alpha' \text{sen}(\omega - \theta')}{\text{sen}(\omega - \alpha') \text{sen} \theta'}$$

Ciò visto, risulta immediato che se x e x' sono rette corrispondenti per S e per R , e se y' ed y sono le loro simmetriche rispetto alla mediana di SR , anche la coppia y, y' è formata di rette corrispondenti nella proiettività; cioè la curva è simmetrica rispetto a quella mediana.

Riassumendo:

Se la curva generata da due fasci proiettivi ha una coppia di tangenti parallele, essa possiede due assi di simmetria ortogonale (fra loro ortogonali) ed un centro di simmetria nel punto d'incontro di quegli assi, che è il punto medio della corda dei punti di contatto di quelle tangenti.

Bisogna ora distinguere due sottocasi.

La curva, che è proiezione di un cerchio, può essere o tutta interna o tutta esterna alla striscia limitata dalle tangenti parallele s, s' .

Se è interna, il punto O è interno alla curva e questa stacca su ciascuno degli assi un segmento: se i due segmenti sono uguali si ha un cerchio (come si vede subito dalla generazione proiettiva); se sono disuguali si dirà *asse principale* quello contenente il segmento maggiore (e *vertici principali* i punti della curva su di esso; la curva è interna al cerchio che ha per diametro il segmento congiungente i vertici).

Se invece la curva è esterna alla striscia ss' si considerino i due lati $SR, S'R'$ del rettangolo sopra individuato pure esterni

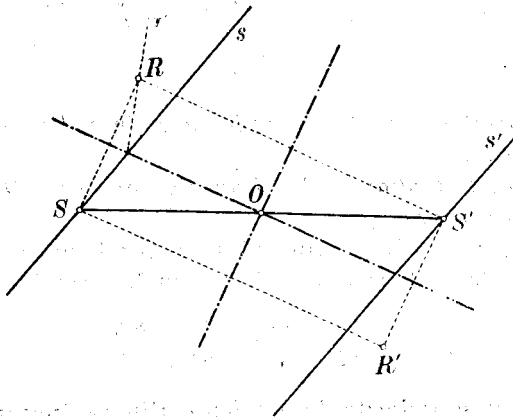


Fig. 13

alla striscia. L'asse perpendicolare ad SR penetra nel triangolo limitato dalle tangenti in S e in R e da SR e taglia nell'interno di esso in un punto la curva (basta pensare alla circonferenza di

cui è proiezione) e così nel punto simmetrico rispetto al centro. Questo *asse* si dirà *principale* e *vertici principali* i punti della curva su di esso (si vede poi facilmente che l'altro asse non può tagliare la curva).

Esaurito l'esame del 1° caso passiamo a quello del 2° (fig. 10).

Sia S un punto della curva con tangente s ; il punto I_∞ di contatto con la retta impropria sia individuato mediante una retta d ; sia infine R l'ulteriore punto d'intersezione con la curva della perpendicolare per S a d , ed r la tangente in R . Dico che: *l'asse del segmento SR è asse di simmetria ortogonale della curva.*

Intanto per il teor. I del n. 4 (di BRLANCHON) le rette s , r e le loro parallele per R ed S determinano un parallelogramma

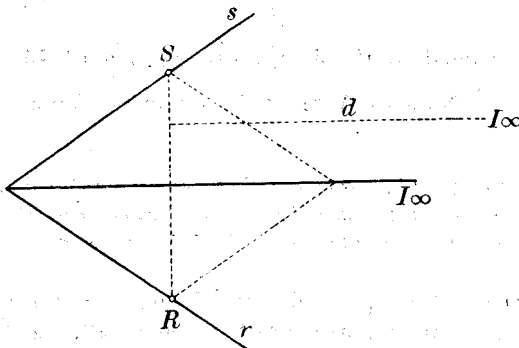


Fig. 14

con diagonali ortogonali: una è il segmento SR , l'altra è il suo asse sul quale dunque s'incontrano s ed r . Si pensi la curva generata da fasci di centri S ed R nei quali si corrispondano le coppie s , RS ; SR , r e le parallele all'asse; se x , x' è una coppia di rette corrispondenti si vede subito, come nell'altro caso, che anche la coppia simmetrica di quella rispetto all'asse è costituita da rette corrispondenti. Con ciò il teorema è provato. *Vertice* è l'intersezione propria della curva con l'asse.

7. Le curve generate da fasci proiettivi come sezioni di coni rotondi. — Stabilita l'esistenza degli assi e dei vertici per le curve generate da fasci proiettivi è facile provare che esse possono considerarsi come sezioni di coni rotondi.

Cominciamo dal caso di una curva dotata di centro; siano A e A' i suoi vertici principali, a e a' le tangenti in essi (perpendicolari alla AA').

La curva può generarsi con fasci proiettivi di centri A e A' : la proiettività è determinata dagli elementi dati e inoltre da un punto P della curva (che deve essere o interno al cerchio di diametro AA' o esterno alla striscia limitata da a, a').

Ma con questi stessi elementi (A, A', a, a', P) si può costruire, secondo il n. 2 a) e b), sempre un'ellisse o un'iperbole che, per il teor. III del n. 4, ha la stessa generazione proiettiva della curva data: questa è dunque un'ellisse o un'iperbole.

Analogamente, in base alla costruzione del n. 2 c), si prova che la curva generata da fasci proiettivi priva di coppie di tangenti parallele è una parabola.

Con ciò è finita di provare l'equivalenza delle definizioni I-IV.