
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ETTORE BORTOLOTTI

L'infinito ed il limite nella matematica antica?

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2,
Vol. 1 (1939), n.1, p. 47–60.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_1_47_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1939.

SEZIONE STORICO-DIDATTICA

PICCOLE NOTE

L'infinito ed il limite nella matematica antica?

Nota di ETTORE BORTOLOTTI (a Bologna).

Sunto. - *Dall'esame delle più autentiche fonti sulla storia della matematica antica, non risulta che gli antichi abbiano sommato serie infinite, nè eseguito passaggi dal finito all'infinito, nè che avessero la concezione attuale di infinito come rapporto logico di una classe ai suoi elementi: cioè di limite.*

1. Il concetto di *infinito* si presenta nelle più antiche cosmogonie sotto la forma, non ben determinata, di *eternità del tempo*, ed in relazione col ritorno ciclico di eventi naturali (l'alternarsi delle stagioni, delle fasi lunari,...). *L'immensità delle spazio* ebbe riconoscimento più tardivo, e fu messa in relazione con *l'attitudine del pensiero a considerare sempre il successivo* in una ordinata successione di fatti.

È nota l'argomentazione di ARCHITA (— 430, — 365): « Non può « esistere limite allo spazio, perchè, se io suppongo di essermi messo « all'estremo limite del mondo, non potrò stendere la mano, od una « bacchetta al di fuori? È assurdo pensare che io non lo possa; « ma se io lo posso, ci sarà qualche cosa al di fuori del mondo; « o corpo, o luogo. E la medesima questione si *rinnoverà sempre*, « se ci è qualche cosa su cui io possa stendere la mano ».

Trasportato così dal mondo fisico al mondo spirituale delle idee, il concetto di infinito assunse aspetto *potenziale* e forma idonea alle considerazioni scientifiche (¹).

2. Troviamo questa sorta di infinito nelle discussioni cui diede luogo la *scoperta delle irrazionali*: i primitivi pitagorici avevano costruito una scienza universale fondata sul concetto di numero e sulle leggi del calcolo aritmetico, considerando come evidenti che tutte le cose appartenenti ad una stessa classe, avessero, in ordine ad una qualità specifica (la grandezza) e ad un elemento unitario, un numero esprimente la loro *pluralità*. E pare che, sulle prime,

(¹) Cfr. *L'infinito e l'infinitesimo nella matematica antica*. Memoria letta da ETTORE BORTOLOTTI nella Sessione dell'8 Maggio 1938 dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna.

si acconciassero a considerare anche le grandezze incommensurabili come aventi pluralità, nei riguardi all'ultimo, indivisibile elemento *la monade*, onde ciascuna grandezza si immaginava costituita.

3. Fu dimostrata l'assurdità di questa ammissione, con una serie di argomentazioni, nelle quali entra in gioco la *indefinita dicotomia di una grandezza finita*. Dagli stessi pitagorici fu poi posto riparo allo scandalo dell'irrazionale coll'applicazione del *metodo di exaustione*, dove si considerano somme ordinate di un numero finito ma arbitrariamente grande di termini, che da un certo punto in poi possono essere supposti *bastantemente piccoli*.

Questo metodo è in sostanza fondato su gli stessi principi di quello da noi usato, e scherzosamente detto il *Tic-Tac-epsilon*, che fu introdotto appunto per evitare le critiche di ordine logico, che si fecero alla teoria del limite ed al moderno calcolo infinitesimale; e ciò ha fatto credere che a quella formale uniformità di metodi, corrispondesse una sostanziale identità di concetti.

4. Ma se la matematica moderna ha fatto così mirabili progressi, mentre quella antica raggiunse ad un tempo la perfezione logica della sua sistemazione deduttiva ed il termine estremo cui fu ad essa possibile pervenire, e se il momento di massimo splendore segnò per essa anche l'inizio di una fase di progressiva secolare decadenza, ciò si deve al fatto che gli antichi non seppero o non vollero lasciar libero volo alla fantasia, che osa spingere lo sguardo al di là degli infiniti passi di una serie infinita, nè accettare come elemento di calcolo il presunto risultato finale di una operazione che non avrà mai termine! E non vollero, o non seppero riconoscere, formulare, proclamare il principio generale che informava le loro genialissime scoperte. In altri termini, mancò ad essi, come da noi ora si direbbe, *la concezione attuale dell'infinito, come rapporto logico di una classe ai suoi elementi*, cioè il concetto di limite.

5. La storia della matematica greca nel periodo presocratico, non ha altre fonti che qualche frammento riportato da ARISTOTELE, o da commentatori posteriori di parecchi secoli, e le tradizioni e le narrazioni fantastiche raccolte nelle *Vite di Diogene Laerzio*.

Su quelle fonti si è, nel secolo scorso, esercitata l'ingegnosità degli storici, che hanno ricostruita una ipotetica storia di quel periodo, il più interessante, il più meraviglioso fra tutti. Ho detto storia ipotetica; anche lo ZEUTHEN, che fu uno dei più arditi e

sapienti costruttori di quella storia, trovava fin troppe ardite le ipotesi del TANNERY, il più fortunato, il più sagace, il più acuto, il più dotto storico di quel periodo (2). Ma le ipotesi, date onestamente come tali dal TANNERY e dallo ZEUTHEN, si presentavano con aspetto così seducente e con così persuasiva concatenazione di causa ed effetti, da prender parvenza di incontestabili verità storiche. E per tali sono state accettate, di poi, anche da quegli stessi costruttori. E nei periodi posteriori, dove era facile e sicuro il riferimento a fonti di prima mano, si è continuato per quella strada, e si sono perfezionate le ricostruzioni logiche dei fatti storici, che non conoscono logica nel loro divenire.

Si è fatta, insomma, la storia del pensiero scientifico collo stesso metodo con cui si fa la sistemazione deduttiva di un trattato scientifico; ed, attribuendo agli antichi le conseguenze di presupposti principi, poi i principi di presupposte conseguenze, si sono respinte addietro nei secoli, non solo le origini, ma anche la sostanziale esistenza delle più moderne teorie, fino a trovare nei testi babilonesi di 30 secoli a. C. la teoria astratta di funzioni trascendenti.

Senza andare tanto oltre, mi contenterò di ricordare che « *tutti i metodi del nostro Calcolo infinitesimale* », insieme colle « *demonstrations exactes des théorèmes infinitesimaux* » (3) si sono ravvisate, prima nelle quadrature archimedee, poi anche in proposizioni degli *Elementi di Euclide*. La *somma di serie infinite convergenti*, si è fatta risalire al tempo degli eleati: « ZENONE D'ELEA, o con lui, o accanto a lui, chi ha trovato la somma delle progressioni geometriche infinite », avrebbe « aperto il mondo dell'infinito » (4), e su quella strada meravigliosa camminarono più avanti Ippocriso da Chio e Democrito, creatore del metodo infinitesimale (?).

Senza preconcetti, e senza pretese di novità, mi propongo qui di risalire alle più accreditate fonti, per vedere qual fondamento abbia l'attribuzione all'antichità classica della scoperta e dell'uso dei concetti di infinito e di limite, che sono le basi necessarie della matematica moderna.

6. La testimonianza del possesso e dell'uso dei concetti di infinito e di limite si dovrebbe trovare nei cosiddetti *Sofismi di Zenone*

(2) Cfr. ZEUTHEN, *L'Œuvre de P. Tannery*. « *Bibl. Math.* », VI, 3, pp. 264, 271, 272, 284, 291.

(3) ZEUTHEN, *Œuvre de P. Tannery*, p. 264.

(4) *Evolution des idées géométriques dans la pensée grecque* (di F. ENRIQUES). Paris 1927, p. 20.

d'Elea, nelle *dimostrazioni per exhaustionem*, di cui si hanno esempi cospicui negli *Elementi di Euclide* e nelle *quadrature di Archimede*.

Comincerò coi *Sofismi di Zenone*.

(Da: HERMANN DIELS, *Fragmente der Vorsokratiker*, « Vierte Auflage », 1° Bd., p. 173): « ZENONE prima dimostra che se una cosa « non ha grandezza, non ha esistenza, poi continua dicendo che « ognuna delle singole sue parti (che se ne formano per dicotomia) « dovrà avere grandezza, spessore e distanza dalle altre, e che ciò « vale sempre, poichè nessuna di tali parti sarà il termine estremo, « nel quale non sono parti distinte l'una dall'altra ».

« Se dunque quelle parti hanno grandezza, là cosa esistente « sarà grande all'infinito (perchè è illimitato il numero delle parti) « se non avranno grandezza, non esisteranno, e la cosa sarà pic- « cola fino al nulla ».

L'esistenza del limite cui tende la successione $1/2, 1/4, 1/8, \dots$ è qui fuor di luogo. Si vuole anzi dimostrare che *non è concepibile termine estremo di una operazione che non ha termine*.

7. L'argomentazione è ripresa, con non minor efficacia, da ANASSAGORA (DIELS, loc. cit., pp. 400, 402).

« Nel piccolo non c'è un minimo, ma un sempre più piccolo, « essendo impossibile che ciò che esiste cessi di esistere (per divi- « sione). Ma anche nel grande c'è sempre un più grande... » (5).

... « E, poichè tanto nel grande quanto nel piccolo c'è egual « numero di particelle, così, anche secondo questa veduta, tutto è « contenuto in tutto, e non può darsi alcun elemento unitario, ma « tutto ha parte in tutto ».

Ciò ARISTOTELE esprimeva col dire che *c'è omeomeria fra il tutto ed ogni sua parte*. LEIBNIZ esprimeva simile concetto dicendo: « *Ogni monade è specchio dell' Universo* » (6). Noi diremmo

(5) Non è forse fuori luogo il ricordare che a questo proposito ERIK FRANK nella sua opera: *Plato und die sogenannten Pitagoreer* (Halle 1923, p. 47), scriveva: « In diesen Worten ist von Anaxagoras, soweit wir wissen « zum erstenmal in der Geschichte der Menschheit, das infinitesimal- « prinzip klar formuliert worden, und dieses Prinzip legt er nun seiner « ganzen Philosophie zugrunde. Zugleich wendet er es auch die Mathe- « matik an, und so ... haben wir in ANAXAGORAS den *eigentlichen Vater der « mathematischen Infinitesimalmethode zu erblicken* ». (Lo creda chi vuole...).

(6) Cfr. lettera ad HUYGENS del 10-20 marzo 1693: « Il n'y a point de « dernier petit corp, et je conçois qu'une particelle de la matière, quelque « petite qu'elle soit, est comme un monde entier plein d'une infinité de « creatures plus petites, et cela à proportion d'un autre corps, fut-il plus « grand que le globe de la terre ».

che c'è *corrispondenza biunivoca* (isomorfismo oloedrico) *fra il tutto ed una sua parte propria*, ed in ciò, da GALILEO in poi, viene riconosciuta la caratteristica degli insiemi infiniti.

Forse ANASSAGORA traeva la sua argomentazione dalla considerazione che si può stabilire corrispondenza biunivoca fra i punti di due segmenti qualsiasi o, se si vuole, fra un segmento ed una sua parte qualunque; come rende evidente una semplice costruzione che rappresenti uno dei segmenti come proiezione dell'altro. Allora tanti saranno i punti in un segmento quanti nella sua metà, e tanti ancora nella metà della metà..., e così sempre. Si noti che, se anche si considerino i punti come privi di estensione, non può essere privo di estensione il segmento che contiene più punti, perchè i punti non possono essere distinti senza avere distanza fra loro, come avverte ZENONE. Dove infine si troveranno gli infiniti punti, sempre gli stessi di numero, al fine della infinita dicotomia? Nel nulla? o piuttosto in un segmento pel quale non sia soddisfatto il postulato di ARCHIMEDE? tale cioè che comunque moltiplicato non possa mai superare un dato segmento finito? La scienza moderna non rifugge da quest'ultima ipotesi (7), si costruiscono anzi matematiche non archimedee.

Ma gli antichi non volevano rinunciare al *postulato di ARCHIMEDE*, e non potevano intendere come *quegli infiniti punti, il cui numero si mantiene sempre costante attraverso tutti i successivi dimezzamenti, dovessero alla fine ridursi in un punto solo, od in nessun punto*. E noi stessi questo ammettiamo perchè ci fa comodo, anzi perchè ci è necessario, in quanto che *su questo assurdo abbiamo fondata tutta la nostra scienza*.

8. Nei suoi famosi *Sofismi sul movimento*, ZENONE non somma gli infiniti termini di una progressione geometrica.

Ecco infatti, secondo ARISTOTELE (ed è la fonte più attendibile) in che cosa essi consistono (8):

(7) Tale ipotesi è implicitamente ammessa da GALILEO nei *Discorsi sopra due nuove scienze*, quando afferma che: « non solamente due indivisibili, « ma nè dieci, nè cento, nè mille non compongono una grandezza divisibile « e quanta ». P. DU BOIS REIMOND nell'opera: *Zur Funktionenlehre*, p. 72, dice: « Eine endliche Anzahl unendlich kleiner Strecken aneinandergesetzt bildet keine endliche Strecke, sondern wieder eine unendlichkleine « Strecke ». Ed a p. 75 aggiunge: « Das Unendlichkleine ist eine mathematische Grösse und hat mit dem endlichen dessen sämtliche Eigenschaften gemein ».

(8) Cfr. « Pys. », VI, 9; « Vors. », 171, 27 e 40, dalla traduzione di TANNERY, in: *Pour la Science hellene*, 2ª edizione, pp. 264, 265.

« Il y a sur le mouvement quatre Logoi de Zenon, dont la solution présente des difficultés: Le premier, sur ce qu'il n'y a pas de mouvement, parce que le mobile doit d'abord parvenir à la moitié avant d'arriver au but; le second est celui qu'on appelle l'Achille, il consiste en ce que le plus lent ne sera jamais atteint dans sa course par le plus rapide, parceque il faut que le poursuivant arrive d'abord au point d'où est parti le poursuivi, en sorte que le plus lent aura toujours quelque avance. Le troisième est que la flèche en mouvement est en repos; cela resulte de ce qu'il prend le temps comme somme d'instantes. Si on n'accorde pas cette prémisse, il n'y pas de conclusion. Le quatrième est sur les masses se mouvant dans le stade, en files égales, paralleles et en sens invers avec une égale vitesse les unes partant de l'extremité du stade, les autres du milieu. Il pense pouvoir conclure à l'égalité entre un temps double et sa moitié ».

ZENONE dunque *non somma la progressione* $1/2 + 1/4 + 1/8, \dots$ non la scrive nemmeno, ma solo considera che la freccia non può giungere allo scopo se non percorrendo infiniti tratti di cammino, e gli infiniti tempuscoli occorrenti a trascorrere quei tratti importerebbero tempo infinito.

Taluno interpreta l'antinomia di ZENONE osservando che l'affermazione: « *un mobile non può raggiungere il termine del suo cammino, senza prima aver raggiunto il punto medio di esso* », ci fa risalire col pensiero all'origine del moto, colla considerazione di una successione di intervalli, che l'uno all'altro si antepongono, le cui ampiezze sono $1/2, 1/4, 1/8, \dots$ dell'intervallo totale. Tali intervalli sono infiniti di numero, al primo intervallo di quella successione non si può giungere che col pensiero, e nei riguardi di esso si ripresenta l'antinomia riscontrata nella infinita dicotomia. Ad ogni modo quel primo intervallo dovrebbe essere, come da noi si direbbe, infinitesimo. E poichè questo vale per qualsiasi spazio, si conclude che ogni moto finito avviene per infiniti spostamenti elementari. Il che, importerebbe tempo infinito ⁽⁹⁾.

⁽⁹⁾ Analoghe considerazioni valgono pel sofisma di ACHILLE. In questo poi, non c'è nessun accenno a progressioni, se non in quanto è parso lecito ai commentatori il completare il testo, aggiungendo una arbitraria proporzionalità fra la velocità di ACHILLE e quella della tartaruga, che non è nel testo, e non è nemmeno presupposta; e facendo credere che ZENONE ne avrebbe avuto necessità ai fini, *presunti*, della sua argomentazione. Ma la storia è materata di fatti, non di opinioni!

Il quarto sofisma è più oscuro. Di esso si è data elegante interpretazione, che si riporta alla teoria della relatività.

Concludendo: ZENONE non somma progressioni infinite; si limita a dimostrare, con elegante riduzione all'assurdo, che *un corpo non è una somma di punti, un tempo una somma di istanti, un moto una somma di spostamenti elementari, da punto a punto: in una parola, ad affermare la continuità della grandezza finita, in opposizione alla pluralità pitagorica.*

9. Ma se di ZENONE, di ANASSAGORA, ed in generale dei *presocratici* non ci rimangono che incerti frammenti che possono essere variamente interpretati ed integrati, abbiamo in epoche posteriori qualche cosa di ben definito e compiuto, nella quale taluno reputa di ravvisare l'attuale sommazione di serie infinite, o l'effettivo passaggio al limite. Ciò nelle applicazioni del *Metodo di esaurimento* che si leggono negli *Elementi di Euclide*, e nelle *Quadrature di Archimede*.

10. È classico l'esempio del calcolo del volume della piramide che vien dato nel Lib. XII degli *Elementi di Euclide*.

Per dimostrare che la piramide è la terza parte del prisma di eguale altezza e base equivalente, occorrono ad EUCLIDE sei proposizioni. E precisamente la 3^a, 4^a, 5^a, 6^a, 7^a ed il Corollario di quest'ultima.

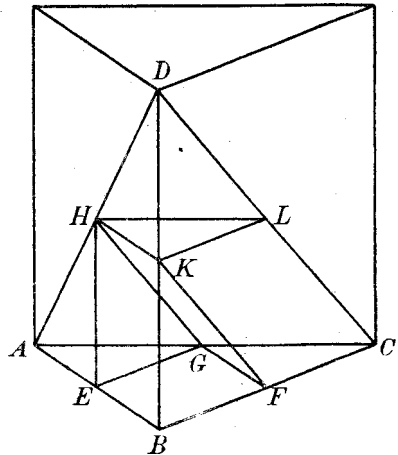
Nella Prop. 3^a, EUCLIDE dimostra che: *Ogni piramide che ha la base triangolare, si divide in due piramidi $T_1(DHKL)$, $T_2(HAEG)$ uguali e simili fra loro, che hanno le basi triangolari, et simili al tutto, et in due prismi uguali (in volume) $[P_1(HKLGFC)$, $P_2(EGHBFK)]$, che sono maggiori (insieme presi) della metà di tutta la piramide.*

È facile vedere che il prisma P_1 è la ottava parte del prisma P

circoscritto alla piramide (di egual base ed egual altezza), ed essendo P_1 equivalente a P_2 , che $P_1 + P_2 = 1/4 \cdot P$.

Le piramidi T_1 , T_2 , simili alla data T , sono ciascuna la ottava parte di essa, dunque insieme $T_1 + T_2 = 1/4 \cdot T$.

Se in ciascuna di queste piramidi si ripete l'operazione fatta per la piramide totale, si avranno quattro piramidi e quattro prismi.



La somma dei prismi sarà $P_{11} + P_{12} + P_{21} + P_{22} = 1/16 \cdot P$, quella delle piramidi $T_{11} + T_{12} + T_{21} + T_{22} = 1/16 \cdot T$.

Se in ciascuna di queste ultime si ripete la medesima operazione, e così si fa sempre, avremo inscritto nella piramide una somma di infiniti prismi:

$$\begin{aligned} & (P_1 + P_2) + (P_{11} + P_{12} + P_{21} + P_{22}) + \\ & + (P_{111} + P_{112} + P_{121} + P_{122} + P_{211} + P_{212} + P_{221} + P_{222}) + \dots = \\ & = P(1/4 + 1/16 + 1/64 + \dots) = 1/3 \cdot P, \end{aligned}$$

mentre le piramidi che mano mano si trascurano hanno volumi evanescenti, corrispondenti ai termini della successione $1/4, 1/16, 1/64, \dots$, che ha limite nullo.

Dunque rimane provato che il volume della piramide è la terza parte di quello del prisma di eguale altezza e di base equivalente.

E rimane anche provato che gli antichi sapevano sommare progressioni geometriche infinite, ed avevano la nozione di limite.

Benissimo! *Ma il guaio è che in Euclide non c'è nulla proprio nulla di quel ragionamento.* Eccezion fatta, s'intende, della iscrizione di quelle somme di prismi e di piramidi.

Dopo aver provato la Prop. 3^a, EUCLIDE dimostra nelle Prop. 4^a e 5^a che: *Le piramidi che hanno la medesima altezza e le basi triangolari, stanno fra loro come le basi.*

E per far ciò suppone fatte in entrambe le piramidi le iscrizioni successive di prismi, indicate precedentemente; non ha bisogno di calcolare i volumi dei prismi inscritti, gli basta di osservare che il prisma P_1 della prima piramide, sta al prisma P_1' della seconda, come la base della prima alla base della seconda, e poichè $P_1 = P_2$ ed anche $P_1' = P_2'$, che la somma $P_1 + P_2$ sta alla somma $P_1' + P_2'$ come la base della prima alla base della seconda. Così di tutte le altre somme parziali, onde anche: *la somma di quanti si vogliono prismi inscritti nella prima sta alla somma dei prismi corrispondenti nella seconda, come la base della prima alla base della seconda.*

E per dimostrare che ciò che resta della piramide dopo che se ne tolgano quelle successive somme di prismi, è evanescente, EUCLIDE non si cura di calcolare quei resti, gli basta di considerare che ciò che resta dopo tolti i due primi prismi è meno della metà della piramide, ciò che resta dopo tolti gli altri quattro, è meno della metà del resto, e così sempre. Ciò per la Prop. 1^a del Libro X.

Per ultimare la dimostrazione, non gli rimane che da applicare la riduzione all'assurdo, per provare che il rapporto delle

piramidi non può essere maggiore, nè minore del rapporto delle basi loro ⁽¹⁰⁾.

Dunque non si parla mai, nè si fa cenno, della considerazione della piramide come limite delle somme dei prismi in essa inscritti. non si sommano infinite serie geometriche, e nemmeno si parla mai di progressioni geometriche!

Taluno osserva, a questo proposito, che *se anche gli antichi non sommarono le progressioni geometriche infinite, che implicitamente si presentano in molte delle applicazioni del metodo di exhaustion, certamente avrebbero saputo farlo*, e si studia di dimostrare questa possibilità.

Mi sovviene del TANNERY, il quale (« Mem. Sc. », III, p. 145), dice che: « *La possibilité ne doit pas faire présumer la réalité* », e per conto mio non darei per provata, nel caso presente, la possibilità di un fatto, dalla non esistenza del fatto medesimo.

11. A meglio chiarire in che cosa effettivamente consista il metodo di exhaustion, e qual relazione esso possa avere col metodo dei limiti, dirò anche, brevemente, del modo tenuto da EUCLIDE per la *quadratura del cerchio*.

Nella Prop. 1^a del Libro XII, egli dimostra che: *I poligoni simili che si descrivono nei cerchi, sono fra loro come i quadrati delli diametri*, e nella Prop. 2^a, che: *I cerchi sono tra loro come i quadrati delli diametri*. E per far questa dimostrazione gli basta di considerare che il quadrato inscritto nel cerchio è maggiore della metà del cerchio; e che *se si raddoppiano i lati di un poligono P regolare inscritto nel cerchio, si lascerà alcune porzioni del cerchio che saranno insieme minori della metà dell'eccesso nel quale il cerchio avanza il poligono P*, e di applicare poi la solita riduzione all'assurdo, per provare che il rapporto dei cerchi non può essere maggiore, nè minore di quello dei quadrati dei diametri.

Dunque *non si considera l'area del cerchio come limite delle aree dei poligoni regolari inscritti*, al raddoppiare indefinito del

⁽¹⁰⁾ Nella Prop. VI EUCLIDE dimostra che: « *Le piramidi che hanno la medesima altezza et le basi di molti angoli, sono fra loro come le basi* », e nella VII, che: « *Ogni prisma che ha la base triangolare si divide in tre piramidi eguali fra loro, che hanno le basi triangolari* ».

Finalmente nel Corollario: « *Da questo è chiaro che ogni piramide è la terza parte del prisma che ha la medesima base et che è della stessa altezza* ».

(Mi sono servito della traduzione del COMMANDINO).

Quanto siamo dunque lontani dalla somma di quelle progressioni infinite e dal concetto di limite!!!

numero dei lati; aggiungerò che EUCLIDE *non si cura nemmeno di osservare che dalla sua proposizione scende immediatamente la costanza del rapporto dell'area del cerchio al quadrato del raggio. Nè si dà premura di dare regola opportuna al calcolo dell'area del cerchio.* Queste cose gli antichi consideravano estranee alla pura geometria (nella quale il rapporto dell'area del cerchio al quadrato del raggio non è esprimibile!) ma pertinenti ad un'arte più bassa: « *La Logistica* ».

12. ARCHIMEDE, invero, nel suo trattatello sulla misura del cerchio segue via diversa; ma ARCHIMEDE, al pari di ARCHITA, era « *uno di quelli d'Italia, che si dicono pitagorici* », cioè in lingua povera *un italiano*, non un greco dell'Ellade, ed al pari di ARCHITA, pregiava al sommo grado la scienza pura, ma non disdegnava le applicazioni, specialmente alla meccanica; e da queste ebbe anzi, lui vivente, la fama universale, che pur ora circonda il suo nome.

ARCHIMEDE, dunque, dimostra, colla solita riduzione all'assurdo, che: « *Ogni cerchio equivale ad un triangolo rettangolo nel quale uno dei cateti è eguale alla circonferenza (rettificata) e l'altro al raggio* ». Ma poi (Prop. II) non teme di affermare che: « *Il rapporto del cerchio al quadrato del suo diametro è quello di 11/14* », poichè, nella proposizione seguente, dimostra che « *il rapporto della circonferenza al diametro è minore di $3 + 1/7$ e maggiore di $3 + 10/71$* ».

13. E veniamo alle quadrature archimedee.

La geometria metrica primitiva è quella del rettangolo. Troviamo questa geometria sufficientemente, se pure empiricamente sviluppata, 3000 e più anni a. C., presso i sumerii, che usavano dar forma rettangolare, ai loro campi. Quasi inconsciamente, ma inevitabilmente, i principî di quella geometria hanno formato il fondo tradizionale comune a tutte le geometrie metriche. Anche oggi, nel nostro calcolo integrale, supponiamo le figure piane da studiare scomposte in striscie rettangolari, ed i solidi rotondi, in dischi generati dalla rotazione intorno all'asse di elementi rettangolari.

Così fece ARCHIMEDE, nella *quadratura della parabola*, e nella *Memoria sui Conoidi e Sferoidi*.

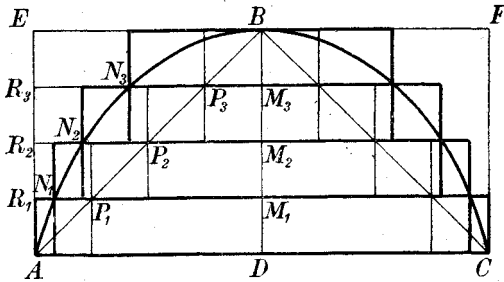
Ma nemmeno lui ha considerato la misura della grandezza da misurare come limite della somma di figure elementari inscritte e circoscritte; usa quelle scomposizioni solo per ricavarne il rapporto della grandezza da misurare a quella di figura nota, supponendo in entrambe le figure analoga scomposizione, tale che le

somme finite di elementi corrispondenti, abbiano rapporto costante; e dimostrando poi, colla riduzione all'assurdo, che tale rapporto avranno anche le figure considerate.

A spiegare meglio questo metodo basterà un esempio, quello del conoide parabolico, che vedo più di frequente riportato.

14. Si tratta di dimostrare che il volume del conoide descritto dalla rotazione del segmento parabolico ABC intorno all'asse AB è $3/2$ di quello del cono descritto dalla rotazione del triangolo ABC , o, ciò che vale lo stesso, ad $1/2$ del volume del cilindro circoscritto. (Prop. XXI della Memoria sui *Conoidi e Sferoidi*).

Perciò suppone diviso l'asse DB , in un certo numero n di parti eguali, e considera i rettangoli inscritti e circoscritti che hanno



per altezza comune δ_n , la parte n^{esima} dell'asse, e per basi i segmenti di retta $\overline{M_r N_r}$, $\overline{M_r R_r}$, $\overline{M_r P_r}$, condotti per i punti di divisione parallelamente alla base AC , compresi nel segmento parabolico, e, rispettivamente fra i lati del rettangolo circoscritto e del triangolo inscritto; ed anche i dischi generati dalla rotazione di quei rettangoli attorno all'asse BD .

Ha già dimostrato (Prop. XX) che la differenza fra la figura inscritta e la circoscritta è sempre eguale al rettangolo (od al dischetto) aderente alla base del conoide, e ciò rende agevole il dimostrare che tale differenza può farsi minore di qualsiasi grandezza data, col prendere abbastanza grande il numero n delle parti in cui fu diviso l'asse.

Ed è questo un particolare che si riscontra sempre nelle quadrature archimedee.

Ora, per una nota proprietà della parabola, si ha:

$$(1) \quad \frac{\overline{AD}^2}{\overline{M_r N_r}^2} = \frac{\overline{BD}}{\overline{B M_r}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{P_r M_r}} = \frac{\overline{R_r M_r}}{\overline{P_r M_r}},$$

ed anche

$$(2) \quad \frac{\frac{\sum_1^{n-1} \pi \delta_n \overline{AD}^2}{\sum_1^{n-1} \pi \delta_n \overline{M_r N_r}^2}}{1} = \frac{\overline{\pi AD}^2 \cdot \overline{DM_{n-1}}}{\sum_1^{n-1} \pi \delta_n \overline{M_r N_r}^2} = \frac{\sum_1^{n-1} \overline{R_r M_r}}{\sum_1^{n-1} \overline{P_r M_r}},$$

ossia: *il cilindro circoscritto (diminuito del dischetto superiore) sta allo scaloide inscritto, come la somma dei segmenti di retta inscritti nel rettangolo, alla somma dei segmenti inscritti nel triangolo.*

Dall'esame della figura immediatamente si rileva che la somma dei segmenti $R_r M_r$ (tutti eguali ad AD) inscritti nel rettangolo $ADBE$, è eguale al doppio della somma dei segmenti $P_r M_r$, inscritti nel triangolo.

Da cui subito si vede che: « *Il cilindro intero circoscritto è più grande del doppio dello scaloide inscritto nel conoide* ». Analogamente prova che: « *Il cilindro circoscritto è minore del doppio dello scaloide circoscritto* » ⁽¹⁴⁾. E da ciò, colla solita riduzione all'assurdo, si deduce che *il cilindro circoscritto è eguale al doppio del conoide.*

15. Sinceramente non vedo in questo procedimento le formule:

$$s_n = \pi \delta_n^2 [1 + 2 + \dots + (n-1)] = \pi \frac{(n-1)n}{2} \delta_n^2 = \pi \frac{n-1}{2n} \overline{BD}^2,$$

$$S_n = \pi \delta_n^2 [1 + 2 + \dots + n] = \pi \frac{(n+1)n}{2} \delta_n^2 = \pi \frac{n+1}{2n} \cdot \overline{BD}^2,$$

per la misura degli scaloidi inscritti e circoscritti, che sono riporate anche nel pregevole vol. 12. « *Le origini del Calcolo infinitesimale nell'era moderna* » della « *Collezione per la Storia e la filosofia*

(14) Si passa dalle figure inscritte alle circoscritte aggiungendo il dischetto inferiore $\pi \delta_n \overline{AD}^2$ ad entrambe le somme nella frazione al primo membro della (2), e la base AD ad entrambe quelle all'ultimo membro. Si ha così la relazione:

$$\frac{\text{cilindro}}{\text{scaloide circ.}} = \frac{\frac{\pi \delta_n \overline{AD}^2 \overline{DB}}{\sum_1^{n-1} \pi \delta_n \overline{M_r N_r}^2 + \pi \delta_n \overline{AD}^2}}{\frac{\sum_1^{n-1} \overline{R_r M_r} + \overline{AD}}{\sum_1^{n-1} \overline{P_r M_r} + \overline{AD}}}$$

ma

$$\frac{\sum_1^{n-1} \overline{R_r M_r}}{1} = 2 \frac{\sum_1^{n-1} \overline{P_r M_r}}{1}$$

dunque

$$\frac{\sum_1^{n-1} \overline{R_r M_r} + \overline{AD}}{1} < 2 \left(\frac{\sum_1^{n-1} \overline{P_r M_r} + \overline{AD}}{1} \right).$$

delle matematiche », nè vedo l'integrale definito

$$V = \pi \int_0^a (x^2 + y^2) dz = \int_0^a z dz = \frac{\pi}{2} a^2, \quad (a = \overline{BD}).$$

per il calcolo del volume del conoide.

Ad ogni modo manca sempre una piccola cosa: il *concetto di limite*, il *passaggio al limite*, ed il *metodo dei limiti*. E non è lecito, storicamente, presupporre quella piccola cosa, mentre da queste quadrature archimedee, quella tal cosa si dovrebbe appunto ricavare come storicamente dimostrata.

Piccola cosa invero, per noi che abbiamo ad essa fatta l'assuefazione; ma *ci sono voluti non meno di 20 secoli*, prima che LUCA VALERIO osasse affermare che dalla formula (2) si poteva immediatamente ricavare con un passaggio al limite ardito (ma poco corretto) che *il cilindro è doppio del conoide come il rettangolo lo è del triangolo*.

16. Sta il fatto che presso gli antichi, « non c'è ancora la consapevolezza di serie di relazioni prolungantisi indefinitamente, « di fronte a cui l'assoluto dovrà concepirsi come totalità o come « ultimo termine, implicando così l'idea di un infinito in atto » (12).

E non c'è ancora il concetto ben determinato, di *infinito numerico*. ARCHIMEDE trova necessario di dimostrare geometricamente (nell'operetta *l'Arenario*) con una laboriosa Memoria scientifica, che la serie dei numeri è illimitata, cioè che in essa si trovano sempre numeri superiori a qualsiasi altro denominato; mentre questo è per noi carattere essenziale, corrispondente al postulato che informa la generazione dei numeri: « ogni numero ha un successivo ». Tanto più strano apparirà questo fatto quando si pensi che ARCHITA già aveva dato la prova dello spazio infinito appunto dalla possibilità di stendere la mano avanti, in qualunque punto dello spazio uno si trovi.

Ma i punti dello spazio sono oggetti materiali fuori di noi, e la serie numerica è una creazione del nostro pensiero.

17. Ciò non toglie che non si trovino, anche nella antichità classica, esempi cospicui, nei quali i concetti di infinito e di limite, ed i precetti fondamentali del metodo dei limiti sono implicitamente, più o meno coscientemente, applicati. Già è stato avver-

(12) *Le matematiche nella storia e nella cultura*. Lezioni di F. ENRIQUES. pubblicato per cura di ATTILIO FRAIESE. Bologna, 1938-XVII, p. 128.

tito dallo ZEUTHEN ⁽¹³⁾ che: « employer de fait une méthode n'est
« pas identique à l'élucider pour soi-même, au point de savoir
« s'en servir chaque fois que le besoin s'en ressent, et encore
« moins, l'établir de telle façon qu'autrui le puisse utiliser ».

Anche HANKEL, del resto, aveva osservato, che: « Jede Art von
« Anschauungen bleibt so lange latent und daher unvollkommen
« als sie nicht ihre Bethätigung findet » ⁽¹⁴⁾.

Di ciò, e degli inizi del metodo dei limiti, e degli algoritmi infiniti, nel medio-evo e nel nostro rinascimento, parleremo in un articolo prossimo.

⁽¹³⁾ Cfr. *Histoire des Mathématiques dans l'antiquité et le moyen-âge*, p. 79.

⁽¹⁴⁾ *Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter*, p. 72.