

---

# BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

CARLO EMILIO BONFERRONI

## Alcune trasformazioni di integrali

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2,*  
Vol. 1 (1939), n.1, p. 44–46.

Unione Matematica Italiana

<[http://www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_1939\\_2\\_1\\_1\\_44\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_1_44_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

*SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

## Alcune trasformazioni di integrali.

Nota di CARLO E. BONFERRONI (a Firenze).

**Sunto.** - *L' A. stabilisce alcune identità che possono servire come formole di trasformazione d' integrali.*

1. Trattando da due diversi punti di vista un problema attuariale <sup>(1)</sup>, sono giunto a due diverse espressioni della soluzione (unica): eguagliandole, ne ho tratta la seguente identità.

$$(A') \quad \int_0^x f(s, x)g(s, x)ds = \int_0^x f(s, x)g(s, s)e^{\int_s^x \frac{\int_0^t f(s, x)g_t(s, t)ds}{\int_0^t f(s, x)g_t(s, t)ds} dt} ds.$$

In questa,  $e$  è la costante di NEPERO, le funzioni  $f(s, x)$  e  $g(s, x)$  si suppongono continue rispetto ad  $s$  e la seconda è supposta derivabile rispetto ad  $x$  (rappresentandone con  $g_x$  la corrispondente derivata). Si suppone che per  $t \neq 0$  non sia nullo il denominatore della frazione nel 2° membro, che sia  $g(s, s) \neq 0$  e che la frazione ora detta abbia, in  $(0, x)$ , integrale finito (il che avviene certamente quando per  $t = 0$  essa ha limite finito).

Essendo desiderabile una dimostrazione della (A') che ricorra a considerazioni puramente analitiche, senza riferimenti ad interpretazioni attuariali, indico la seguente, la quale conduce, anzi, ad una identità ancor più generale.

Fissiamo nella  $f(s, x)$  il 2° argomento ponendo  $x = y$ , e cerchiamo una funzione  $\theta(t, y)$ , continua rispetto a  $t$  per  $t \neq 0$ , che renda, per ogni  $x$ ,

$$(1) \quad \int_0^x f(s, y)g(s, x)ds = \int_0^x f(s, y)g(s, s)e^{\int_s^x \theta(t, y)dt} ds.$$

Posto

$$\Theta(x, y) = e^{-\int_0^x \theta(t, y)dt} \quad \text{onde} \quad \Theta_x(x, y) = -\Theta(x, y)\theta(x, y)$$

(1) *Sul calcolo di un accumulo.* (Giorn. dell' Ist. ital. degli Attuari, 1938).

questa diviene

$$\Theta(x, y) \int_0^x f(s, y)g(s, x)ds = \int_0^x f(s, y)g(s, s)\Theta(s, y)ds.$$

Per la coincidenza dei due membri, che per  $x=0$  sono eguali, basta la coincidenza delle loro derivate rispetto ad  $x$ : eseguendole e semplificando, si ha

$$(2) \quad \Theta(x, y) = \frac{\int_0^x f(s, y)g_x(s, x)ds}{\int_0^x f(s, y)g(s, x)ds}.$$

In base a questa, la (1) diviene

$$(A) \quad \int_0^x f(s, y)g(s, x)ds = \int_0^x f(s, y)g(s, s)e^{\int_s^x \frac{\int_0^t f(s, y)g_x(s, t)ds}{\int_0^t f(s, y)g(s, t)ds} dt} ds,$$

valida per  $x, y$  arbitrari. Per  $y=x$ , si ha in particolare la (A').

2. P. es. sia  $f(s, x)=1$ ,  $g(s, x)=h+x-s$ ,  $h \neq 0$ : si ha subito

$$\int_0^x fgds = hx + \frac{x^2}{2}, \quad \Theta = \frac{\int_0^t ds}{ht + \frac{2}{2}} = \frac{2}{2h+t}, \quad \int_s^x \Theta dt = \log \left( \frac{2h+x}{2h+s} \right)^2$$

onde l'identità

$$hx + \frac{x^2}{2} = \int_0^x h \left( \frac{2h+x}{2h+s} \right)^2 ds = (2h+x)^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{h}{2h+x} \right).$$

Questa vale anche per  $h=0$ : in tal caso è  $g(s, s)=0$ , ma  $\Theta$  diventa  $2/t$  e non ha integrale finito in  $(0, x)$ .

3. Operando con lo stesso metodo precedente, si può cercare una funzione  $\Theta(t, y)$ , continua rispetto a  $t$  per  $t \neq 0$ , che soddisfi alla

$$(3) \quad \int_0^x f(s, y)g(s, x)ds = \int_0^x f(s, y)g(s, s) \left[ 1 + \int_s^x \Theta(t, y)dt \right] ds.$$

Derivando rispetto ad  $x$  e semplificando, si ottiene

$$\Theta(x, y) = \frac{\int_0^x f(s, y)g_x(s, x)ds}{\int_0^x f(s, y)g(s, s)ds}$$

nell'ipotesi che il denominatore non s'annulli per  $x \neq 0$ . Sostituendo nella (3), si ha così l'identità

$$(B) \int_0^x f(s, y)[g(s, x) - g(s, s)] ds = \int_0^x f(s, y)g(s, s) \int_s^x \frac{\int_0^t f(s, y)g(s, t) ds}{\int_0^t f(s, y)g(s, s) ds} dt ds.$$

Anche qui supporremo che la frazione che figura nel secondo membro abbia, in  $(0, x)$ , integrale finito rispetto a  $t$ , notando che ciò si verifica sicuramente se essa, per  $t = 0$ , ha limite finito.

4. Se in (A) e (B) poniamo  $f(s, x) = 1$ ,  $g(s, x) = g(x - s)$ , otteniamo

$$\int_0^t g(s, t) ds = \int_0^t g'(t - s) ds = g(t) - g(0).$$

Operando poi la sostituzione  $x - s = u$ , si perviene rispettivamente a

$$(C) \int_0^x g(u) du = g(0) \int_0^x e^s \int_0^t \frac{g(t) - g(0)}{\int_0^t g(u) du} dt ds$$

$$(D) \int_0^x g(u) du = xg(0) + \int_0^x \int_s^{xx} \frac{g(t) - g(0)}{t} dt ds$$

la seconda delle quali si giustifica subito per semplice derivazione d'ambo i membri rispetto ad  $x$ , oppure invertendo l'ordine delle integrazioni nell'integrale doppio.

È ovvio, poi, che combinando le identità suddette altre se ne possono trarre: p. es., eguagliando i secondi membri di (A) e (B), o di (C) e (D), come pure facendo tendere  $x$  all'infinito sotto opportune condizioni.